This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

Phys 3208.88

HARVARD COLLEGE
LIBRARY

FROM THE
FARRAR FUND

The bequest of Mrs. Eliza Farrar in memory of her husband, John Farrar, Hollis Professor of Mathematics, Astronomy and Natural Philosophy, 1807–1836

SCIENCE CENTER LIBRARY

THÉORIE

DE

L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

OUVRAGES DE M. ÉMILE MATHIEU.

Dynamique analytique. In-4; 1878..... 15 fr.

Tous les Ouvrages de Mécanique commencent par l'exposition des mêmes principes; mais ils se séparent bientôt selon que l'auteur a voulu faire un Traité de Mécanique rationnelle ou s'est proposé surtout la Théorie des Machines. Quant aux Ouvrages de Mécanique rationnelle, ordinairement ils renferment, surtout comme applications, des problèmes peu réalisables, tandis que la puissance de la Mécanique rationnelle se montre principalement dans l'étude du mouvement des corps célestes. Aussi est-ce vers ce côté que sont dirigées les théories de la *Dynamique analytique* de M. Mathieu, qui pourrait être intitulée *Prodrome de Mécanique céleste*. On peut citer deux Ouvrages qui ont été faits dans le même but : la *Mécanique analytique* de Lagrange et les *Vorlesungen über Dynamik* de Jacobi, qui sont de date beaucoup plus récente. Mais, bien que M. Mathieu ait utilisé tous les résultats acquis à la Science dans cette branche des Mathématiques, c'est avec celui de Lagrange que son Ouvrage a, par l'exposition, le plus d'analogie.

Traité de Physique mathématique.

I. Cours de Physique mathématique. In-4; 1873..... 15 fr.

II. Théorie de la capillarité. In-4; 1883..... 10 fr.

III-IV. Théorie du potentiel et ses applications a l'Électrostatique et au Magnétisme.

Première Partie. — *Théorie du potentiel.* In-4; 1885..... 9 fr.
Deuxième Partie. — *Électrostatique et Magnétisme.* In-4; 1886..... 12 fr.

V. Théorie de l'Électrodynamique. In-4; 1888..... 15 fr.

13673 Paris. — Imprimerie Gauthier-Villars et Fils, quai des Grands-Augustins, 55.

THÉORIE

DE

L'ÉLECTRODYNAMIQUE

PAR

M. ÉMILE MATHIEU,

PROFESSEUR A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE NANCY.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,

Quai des Grands-Augustins, 55.

—

1888

(Tous droits réservés.)

~~T 3028~~
Phys 3208.88

HARVARD COLLEGE
FEB 6 1890
LIBRARY.

Farrar fund.

PRÉFACE.

Ce Livre sur l'Électrodynamique forme le cinquième Volume de mon Traité de Physique mathématique. J'espère qu'on reconnaîtra par la lecture de ce Traité que la Physique mathématique, qui ne date guère que du commencement du siècle, est déjà une science très avancée, qui ne s'appuie que sur un très petit nombre d'hypothèses, devenues pour la plupart incontestables, et que toutes les équations différentielles qui régissent les phénomènes en sont des conséquences analytiques rigoureuses.

Ce Livre renferme un principe nouveau, que j'ai toutefois déjà énoncé (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences,* octobre 1887). On verra, dans le Chapitre IV, que j'ai été conduit à admettre que, lorsqu'un conducteur est traversé par des courants électriques permanents, sa surface est recouverte d'une double couche d'électricité et non d'une simple couche. Cette double couche se compose de deux couches d'électricité parallèles, extrêmement voisines, et deux éléments de ces couches qui se projettent sur un même élément de la surface du con-

ducteur contiennent des masses d'électricité égales et de signe contraire.

L'Ouvrage est divisé de la manière suivante :

Dans le premier Chapitre, j'établis quelques principes généraux sur le mouvement de l'électricité à l'intérieur d'un corps conducteur.

Dans le deuxième, j'expose les lois générales des courants linéaires permanents. Je commence par y donner les résultats des recherches de Ohm et les conséquences qui en ont été déduites par Kirchhoff. Le travail de Ohm a été publié en 1827 dans un Livre intitulé : *Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet;* il est par conséquent postérieur aux recherches d'Ampère sur l'Électrodynamique, qui parurent de 1820 à 1825. Les recherches de chacun de ces physiciens sont complètement indépendantes de celles de l'autre, et il est naturel de parler d'abord de celles de Ohm, qui reposent sur des considérations plus simples. Cependant le Chapitre II est surtout consacré à l'exposition des résultats obtenus par Ampère. Après lui, plusieurs savants se sont occupés du même sujet, et, en particulier, Franz Neumann y a introduit la considération du potentiel mutuel de deux courants. Néanmoins ces recherches n'ont donné aucun fait physique nouveau pour les courants linéaires permanents; mais elles ont servi à présenter d'une manière purement mathématique les découvertes d'Ampère et à préparer à l'étude des courants variables.

Le Chapitre III est consacré à l'induction produite dans les courants linéaires. Il renferme les résultats obtenus sur ce sujet par W. Weber, Helmholtz, F. Neumann et Maxwell.

Dans le Chapitre IV, j'expose la théorie de la double couche qui se trouve à la surface d'un conducteur traversé par des courants permanents. Déjà l'on sait que, lorsque deux métaux différents sont en contact, ils sont séparés par une double couche d'électricité, et M. Helmholtz a reconnu en outre la présence d'une double couche à la surface de séparation d'un électrolyte et de l'une au moins des électrodes et de même à la surface de séparation de deux liquides mis en communication avec les deux pôles d'une pile. Ces faits ont été étudiés par MM. Helmholtz, Lippmann et Arthur Kœnig. La substitution d'une double couche à une simple couche à la surface d'un conducteur quelconque traversé par des courants permanents ne modifie pas les principaux faits observables par l'expérience. En effet, dans les deux hypothèses, non seulement les courants qui traversent le conducteur, mais aussi les actions électromagnétiques à l'extérieur restent les mêmes. Cependant la première hypothèse est plus commode pour l'application du calcul; car, pour que le problème soit complètement étudié, il faut encore calculer la couche d'électricité qui recouvre le conducteur. Or, de la connaissance du potentiel des courants on déduit immédiatement la puissance de la double couche, tandis que, dans l'hypothèse d'une simple couche, il faudrait pour déterminer sa densité calculer d'abord son potentiel extérieur, ce qui peut présenter de très grandes difficultés.

Je termine ce Chapitre en m'occupant d'une manière particulière des courants qui traversent une sphère et de leur action magnétique.

Dans le Chapitre V, j'examine différents exemples de courants permanents. Plusieurs de ces exemples relatifs aux plaques planes ou courbes ont été pris dans les Mémoires de Kirchhoff. Je mentionne encore ici la détermination que j'ai faite de la force magnétique exercée à l'extérieur par une plaque circulaire traversée par des courants permanents, et les calculs que j'ai employés pour obtenir les courants dans une plaque rectangulaire ou dans un parallélépipède rectangle.

Dans le Chapitre VI, je traite plusieurs problèmes relatifs aux courants d'induction produits dans des plaques ou dans des conducteurs de révolution : en particulier se trouve résolu le problème du disque tournant d'Arago. Je ferai remarquer surtout pour ce Chapitre les intégrations que j'y ai faites.

Le Chapitre VII se rapporte aux unités électriques. Ce sujet est indispensable, dès que l'on veut passer des théories générales aux applications; nous étions donc obligé de l'exposer pour traiter des fils télégraphiques.

Dans le Chapitre VIII, j'établis, suivant une méthode donnée par M. Helmholtz, les équations différentielles qui régissent le mouvement variable de l'électricité dans des conducteurs quelconques laissés en repos. Je regarde toutefois les con-

ducteurs comme recouverts à la fois d'une simple couche d'électricité et d'une double couche, telle que je l'ai définie ci-dessus. Je termine en indiquant la marche à suivre pour rechercher les intégrales de ces équations.

Enfin, dans le Chapitre IX, je m'occupe du mouvement de l'électricité dans les fils télégraphiques. J'ai consacré beaucoup de temps à cette recherche. M. W. Thomson a obtenu par des raisonnements empiriques une formule relative à l'intensité du courant dans les fils télégraphiques sous-marins. Par une analyse rigoureuse, j'étudie toutes les circonstances du mouvement et je calcule toutes les quantités qui en dépendent ; de la sorte j'obtiens, en particulier pour le courant longitudinal, une formule plus compliquée que celle de M. Thomson, mais qui donne des résultats peu différents, surtout quand le courant a duré assez longtemps pour qu'on puisse réduire dans les deux formules les séries de termes variables avec le temps au premier terme. On sait que déjà l'expérience avait montré l'utilité de l'emploi de la formule de M. Thomson dans la Télégraphie sous-marine.

La propagation de l'électricité dans les fils sous-marins est extrêmement rapide; mais elle l'est encore bien davantage dans les fils aériens; il en résulte que les expériences sur ces derniers fils sont encore plus difficiles que sur les premiers. Néanmoins, de l'ensemble des recherches faites par les physiciens, il semble résulter que la durée de l'établissement du courant dans un fil aérien, estimée avec un appareil donné,

varie avec la longueur du fil dans un rapport très analogue aux carrés de cette longueur. Après avoir retourné la question dans tous les sens, je n'ai pu arriver à ce résultat qu'en tenant compte de la perte de l'électricité par les poteaux qui soutiennent le fil. Je précise alors la manière dont la durée de l'établissement du courant varie avec la longueur du fil.

É. MATHIEU.

Nancy, le 3 juillet 1888.

THÉORIE

DE

L'ÉLECTRODYNAMIQUE.

CHAPITRE I.

PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR LE MOUVEMENT DE L'ÉLECTRICITÉ DANS L'INTÉRIEUR D'UN CORPS CONDUCTEUR.

Après la découverte de la pile voltaïque qui sépare et met en mouvement les deux électricités, les premières recherches sur l'Électrodynamique se rapportèrent à des courants linéaires, c'est-à-dire à des mouvements de l'électricité dirigés seulement suivant des fils métalliques, et ce sont de beaucoup les plus faciles à étudier. Il existe cependant quelques principes généraux très simples qui se rapportent à des courants électriques, traversant des conducteurs de forme quelconque, et c'est par l'exposition de ces principes qu'il convient de commencer.

Définitions préliminaires.

1. Supposons que de l'électricité se meuve dans l'intérieur d'un conducteur sous des influences quelconques et considérons le mouvement relatif de cette électricité par rapport à ce corps.

Concevons d'abord que ce mouvement ait en chaque point du corps une grandeur et une direction qui ne varient pas avec le temps. Par

un point quelconque A, menons un élément ω de surface perpendiculaire à la direction du mouvement. Menons une normale N à cet élément dans une direction que nous regarderons comme positive. Une certaine quantité d'électricité traversera ω dans l'unité de temps et dans le sens de la normale N; désignons par m cette quantité d'électricité prise avec son signe et par m' la quantité d'électricité qui traverse ω dans le même temps en sens contraire. Nous pouvons regarder $m - m'$ comme la masse *algébrique* d'électricité qui traverse ω dans la direction de la normale positive. Représentons par $i\omega$ cette masse d'électricité; on dit que ω est traversé par un courant dont l'intensité est i et dont la direction est celle de la normale N.

Si le mouvement de l'électricité varie en chaque point du corps avec le temps t, mais d'une manière continue, on peut supposer qu'il reste invariable en grandeur et en direction pendant l'instant dt, et, si l'élément ω de surface est encore mené par le point A normalement au mouvement en ce point, la quantité d'électricité qui traversera ω pendant dt pourra être représentée par

$$d\mu = i\omega\, dt,$$

et i sera encore l'intensité du courant au point A.

2. Cherchons ensuite la quantité d'électricité qui traverse un élément quelconque υ de surface pris dans le corps. Par le contour de cet élément, menons un cylindre parallèle à la direction du mouvement et désignons par ω la section droite de ce cylindre; la quantité d'électricité qui traverse υ pendant l'instant dt est encore représentée par

$$d\mu = i\omega\, dt;$$

désignons par N la normale à υ, nous aurons

$$\omega = \upsilon \cos(i, \mathrm{N})$$

et, par suite,

$$d\mu = i\upsilon \cos(i, \mathrm{N})\, dt.$$

Menons une droite de même direction que i et dont la grandeur est représentée par i, et désignons par ξ, η, ζ ses projections sur trois axes rectangulaires liés au corps; soient, de plus, λ, μ, ν les angles de la

normale N avec ces trois axes; nous aurons

$$i\cos(i, N) = \xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu$$

et

$$(\alpha) \qquad d\mu = (\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu)\upsilon\, dt.$$

Menons par le point A trois éléments plans υ_1, υ_2, υ_3, parallèles aux plans de coordonnées; les quantités d'électricité qui les traverseront, $d\mu_1$, $d\mu_2$, $d\mu_3$ se déduiront immédiatement de la formule (α), et nous aurons

$$d\mu_1 = \xi\upsilon_1\, dt,$$
$$d\mu_2 = \eta\upsilon_2\, dt,$$
$$d\mu_3 = \zeta\upsilon_3\, dt,$$
$$i = \sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}.$$

Ces formules montrent que les composantes ξ, η, ζ de i au point A, multipliées par un élément de surface υ, sont les quantités d'électricité qui traversent l'élément de surface υ, mené par A parallèlement à chacun des plans de coordonnées, ces quantités d'électricité étant estimées par unité de temps.

3. Dans l'équation

$$i\omega\, dt = d\mu,$$

$d\mu$ est la différence d'une quantité $d\mu'$ d'électricité qui se meut dans la direction positive et d'une quantité $d\mu''$ qui se meut en sens contraire; nous avons donc

$$(\beta) \qquad i\omega\, dt = d\mu' - d\mu''.$$

Regardons comme égales les vitesses de sens contraire de $d\mu'$ et $d\mu''$, et désignons par ds' et ds'' les éléments décrits par $d\mu'$ et $d\mu''$ pendant le temps dt; nous aurons

$$\frac{ds''}{dt} = -\frac{ds'}{dt},$$

et, en multipliant l'équation (β) par $\frac{ds'}{dt}$, nous obtenons

$$i\omega\, ds' = \frac{ds'}{dt}d\mu' + \frac{ds''}{dt}d\mu''$$

Nous pouvons diviser $d\mu'$ et $d\mu''$ en éléments d'un ordre plus petit, que nous désignerons chacun par dm; désignons par v leur vitesse qui sera positive ou négative, suivant qu'elle sera dirigée dans le sens de la normale à ω, positive ou négative; nous aurons

$$(\gamma) \qquad i\omega\, ds' = \Sigma v\, dm,$$

le signe sommatoire Σ s'étendant à toutes les molécules électriques dm qui traversent ω dans le temps dt.

$\omega\, ds'$ représente un élément de volume $d\varpi$; $d\mu'$ est la masse d'électricité qui a parcouru ds' à partir de la base ω dans le temps dt et dans le sens positif; c'est donc la masse d'électricité qui, se mouvant dans cette direction, est renfermée dans $d\varpi$; de même, $d\mu''$ est la masse d'électricité se mouvant dans la direction contraire et renfermée dans $d\varpi$. Donc, dans l'égalité (γ), dm représente une molécule électrique quelconque renfermée dans $d\varpi$. Écrivons ainsi cette équation

$$i\, d\varpi = \Sigma v\, dm,$$

et il est évident que nous pouvons maintenant supposer à l'élément $d\varpi$ une forme quelconque.

Multiplions cette équation successivement par les cosinus directeurs de i; nous pouvons représenter par $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$ les composantes de v, lesquelles prennent des valeurs égales au signe près pour les différentes molécules dm, et nous aurons les équations

$$\xi\, d\varpi = \sum \frac{dx}{dt}\, dm, \qquad \eta\, d\varpi = \sum \frac{dy}{dt}\, dm, \qquad \zeta\, d\varpi = \sum \frac{dz}{dt}\, dm.$$

Force électromotrice.

4. Nous appellerons *force électromotrice* toute force qui donne naissance à des courants. Supposons qu'une telle force agisse d'une manière continue à l'intérieur d'un conducteur. Désignons par P cette force agissant sur l'unité d'électricité positive au point (x, y, z). Le fluide neutre qui se trouve dans un élément de volume $d\varpi$, contenant ce point, est la réunion de quantités d'électricité positive et d'électri-

cité négative que je désigne par $\varepsilon\, d\varpi$ et $-\varepsilon\, d\varpi$. L'électricité $\varepsilon\, d\varpi$ sera sollicitée dans la direction de P par la force $P\varepsilon\, d\varpi$, et l'électricité $-\varepsilon\, d\varpi$ sera sollicitée par une force égale et contraire. Il pourra y avoir, en outre, dans le volume $d\varpi$ de l'électricité libre $\varepsilon' d\varpi$, positive ou négative, qui sera sollicitée par la force $P\varepsilon' d\varpi$ dans la direction de P ou en sens contraire.

Le courant, qui en résulte au point (x, y, z), a la direction de P et son intensité, dans un corps homogène, est proportionnelle à

$$P(2\varepsilon \pm \varepsilon')\, d\varpi.$$

Regardons ε' comme très petit par rapport à ε; nous pourrons réduire cette expression à

$$P.2\varepsilon\, d\varpi.$$

Enfin, si l'on suppose que ε a la même valeur dans toutes les parties du conducteur homogène, le courant, qui a la direction de P, sera aussi simplement proportionnel à P. Désignons par ξ, η, ζ les composantes du courant i suivant trois axes rectangulaires et par X, Y, Z les composantes de P; nous pourrons poser

$$\xi = \varkappa X, \qquad \eta = \varkappa Y, \qquad \zeta = \varkappa Z,$$

et $\varkappa$ s'appelle la *conductibilité* du corps pour l'électricité; c'est une quantité constante pour tous les points d'un conducteur homogène, mais elle varie avec la matière du conducteur. On peut aussi poser

$$X = R\xi, \qquad Y = R\eta, \qquad Z = R\zeta,$$

et R, l'inverse de la conductibilité, s'appelle la *résistance spécifique* du conducteur.

De ce qui précède, il résulte que l'intensité du courant dans un élément de volume du conducteur ne dépend pas de la quantité d'électricité en mouvement dans cet élément, mais de la vitesse de ce mouvement.

On voit aussi que, dans le numéro précédent, il faut supposer $d\mu'$ composé de molécules d'un seul signe et $d\mu''$ composé de molécules de signe contraire et $d\mu''$ doit être à très peu près égal à $-d\mu'$.

Variation de l'électricité libre à l'intérieur d'un conducteur.

5. Un conducteur étant traversé par un courant, formons dans ce corps un parallélépipède rectangle dont les trois côtés dx, dy, dz sont parallèles aux axes de coordonnées. Par la face correspondant à l'abscisse x, il entre dans le parallélépipède pendant le temps dt une masse d'électricité égale à

$$\xi\, dy\, dz\, dt,$$

et, par la face opposée qui correspond à l'abscisse $x + dx$, il sort la quantité d'électricité

$$\left(\xi + \frac{d\xi}{dx}\, dx\right) dy\, dz\, dt.$$

Il en résulte, dans le parallélépipède, un accroissement d'électricité égal à

$$-\frac{d\xi}{dx}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

De la même manière les deux autres couples de faces laissent entrer dans le même volume les quantités d'électricité

$$-\frac{d\eta}{dy}\, dx\, dy\, dz\, dt, \quad -\frac{d\zeta}{dz}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

D'autre part, si ρ est la densité de l'électricité, l'électricité libre du parallélépipède, qui a pour masse $\rho\, dx\, dy\, dz$, obtient, dans le temps dt, l'accroissement

$$\frac{d\rho}{dt}\, dx\, dy\, dz\, dt.$$

Égalant ce gain total à la somme des trois gains partiels, on obtient la formule

$$\frac{d\rho}{dt} = -\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right).$$

Courants permanents.

6. Si l'on choisit une pile convenable et qu'on relie un corps conducteur homogène aux pôles de cette pile, ce corps, après un temps

très petit, pourra être considéré comme traversé par des courants permanents pendant un temps plus ou moins long.

La force électromotrice, dans ce cas, ne dépend que du potentiel de l'électricité. Désignons par V ce potentiel, c'est-à-dire la somme des masses des molécules de l'électricité divisées par leur distance au point (x, y, z); alors la force électromotrice, que nous avons désignée par P (n° 4), aura pour composantes en chaque point (x, y, z) du corps

$$X = -\frac{dV}{dx}, \qquad Y = -\frac{dV}{dy}, \qquad Z = -\frac{dV}{dz}.$$

Ohm a reconnu le premier, dans son Livre publié en 1827 (*Die galvanische Kette mathematisch bearbeitet*) que, dans l'état permanent, les composantes de la force électromotrice sont les dérivées par rapport à x, y, z d'une même fonction; mais Kirchhoff paraît avoir remarqué le premier que cette fonction est le potentiel de l'électricité, pris en signe contraire.

Les composantes du courant au point (x, y, z) sont donc

$$\xi = -\varkappa\frac{dV}{dx}, \qquad \eta = -\varkappa\frac{dV}{dy}, \qquad \zeta = -\varkappa\frac{dV}{dz}.$$

Il est facile de reconnaître qu'il n'y a point d'électricité libre à l'intérieur du conducteur. En effet, si ρ est la densité de l'électricité dans ce corps, comme le mouvement est permanent, on a $\frac{d\rho}{dt} = 0$ et l'équation du n° 5 devient

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0.$$

Remplaçons dans cette équation ξ, η, ζ par leurs valeurs; le conducteur étant homogène, $\varkappa$ est constant et nous obtenons l'équation

$$\Delta V = 0,$$

pour les points intérieurs au conducteur. D'ailleurs le potentiel V satisfait à l'équation bien connue

$$\Delta V = -4\pi\rho;$$

et l'on en conclut que la densité ρ est nulle.

Le conducteur ne renferme donc pas d'électricité libre à son intérieur. Helmholtz et Kirchhoff en ont conclu que le conducteur est recouvert d'une couche d'électricité qui, jointe à de l'électricité extérieure, produit le potentiel V. C'est l'opinion la plus généralement admise; elle n'a pas été cependant acceptée par tous les physiciens géomètres. Ainsi, par exemple, Maxwell et Franz Neumann n'ont émis aucune opinion à ce sujet. On verra, dans le Chapitre IV, que nous serons conduits à substituer à la couche d'électricité libre qui recouvrirait le conducteur une double couche d'électricité, c'est-à-dire deux couches d'électricité extrêmement voisines, l'une située à la surface du conducteur, l'autre dans l'air qui enveloppe le conducteur, et telles que deux éléments de ces couches, dont l'un peut être considéré comme la projection de l'autre, renferment des masses d'électricité égales et de signe contraire. C'est cette double couche, jointe à l'électricité des corps qui relient le conducteur à la pile, qui produit le potentiel V. Le système pourra en outre être recouvert d'une couche électrostatique dont le potentiel sera constant à son intérieur.

7. En chaque point de la surface libre du conducteur, le courant doit être dirigé tangentiellement à la surface. Donc, si l'on désigne par λ, μ, ν les angles de la normale intérieure à la surface avec les axes de coordonnées, on a

$$\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu = 0$$

ou

$$\frac{dV}{dx}\cos\lambda + \frac{dV}{dy}\cos\mu + \frac{dV}{dz}\cos\nu = 0;$$

on a donc cette condition à la surface libre du conducteur

$$\frac{dV}{dn} = 0, \tag{1}$$

dn étant l'élément de la normale.

Enfin il y aura des parties τ_1 et τ_2 de la surface du conducteur où entreront et sortiront les courants. Supposons que le potentiel V ait une valeur connue en tous les points de τ_1 et τ_2; posons donc

$$\begin{cases} V = H_1 & \text{sur } \tau_1, \\ V = H_2 & \text{sur } \tau_2; \end{cases} \tag{2}$$

H_1 et H_2 sont des constantes ou sont des fonctions données des coordonnées des points de τ_1 et τ_2.

Ainsi la fonction V sera déterminée analytiquement par l'équation

$$\Delta V = 0, \tag{3}$$

qui a lieu en tous les points intérieurs du conducteur, par la condition (1) qui se rapporte à la surface libre et par les conditions (2) qui ont lieu sur les surfaces par lesquelles entrent et sortent les courants.

On peut vérifier qu'il existe une fonction V et une seule qui satisfait à ces équations. En effet, considérons l'intégrale

$$\Omega = \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2 \right] d\varpi,$$

étendue à tous les éléments $d\varpi$ du volume du conducteur et supposons que la fonction V satisfasse aux conditions (1) et (2) à la surface. On peut se proposer de déterminer la fonction V, de manière que Ω soit minimum. Or, si l'on applique le calcul des variations à la détermination du minimum de Ω, on reconnaîtra que la fonction V satisfait à l'équation (3).

On voit donc aussi que le potentiel V est, parmi toutes les fonctions de x, y, z qui satisfont aux conditions aux limites (1) et (2), celle qui rend minimum l'intégrale Ω.

Variation de l'électricité à la surface d'un conducteur.

8. Lorsqu'un conducteur est traversé par des courants variables avec le temps, le conducteur est recouvert à la fois d'une double couche d'électricité et d'une simple couche qui varient aussi avec le temps.

Supposons le corps placé dans un milieu isolant comme l'air et désignons par ε la densité de la couche simple d'électricité. La quantité $\varepsilon d\sigma$ d'électricité située sur l'élément $d\sigma$ de la surface du corps obtiendra dans l'instant dt un accroissement $\frac{d\varepsilon}{dt} d\sigma\, dt$, ou, autrement dit, un décroissement $-\frac{d\varepsilon}{dt} d\sigma\, dt$.

Mais, si le courant est incliné sur $d\sigma$ et que N soit la normale à $d\sigma$ menée intérieurement, il entre par $d\sigma$ dans le corps une quantité d'électricité égale à $i\cos(i, \mathrm{N})\,d\sigma\,dt$, qui ne peut provenir que de la perte d'électricité qui s'est faite sur $d\sigma$; en égalant ces deux expressions de la perte d'électricité éprouvée par $d\sigma$, on obtient

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -i\cos(i, \mathrm{N})$$

ou (n° 2)

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu).$$

Si le milieu qui entoure la surface σ n'était pas isolant et que les composantes de l'intensité du courant fussent ξ', η', ζ' en dehors de la surface, on obtiendrait de même la formule

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = -(\xi - \xi')\cos\lambda - (\eta - \eta')\cos\mu - (\zeta - \zeta')\cos\nu.$$

Principe de Volta.

9. Si deux conducteurs formés de deux métaux différents A et B sont mis en contact par une surface ω, il se produira une même différence de potentiel dans les deux corps auprès de cette surface. Cette différence de potentiel ne dépendra que de la nature des deux métaux A et B et de leur température; ainsi elle est indépendante de l'étendue des surfaces en contact et de la forme de ces corps. Tel est le principe de Volta.

Il se forme donc à la surface ω, sur chacun des deux corps, une couche d'électricité positive sur l'un A, négative sur l'autre B, les densités des deux couches étant égales et de signe contraire sur deux éléments en contact des surfaces des deux corps. Si les deux corps ne sont soumis qu'à leur action mutuelle, le potentiel total de l'électricité aura une valeur constante dans chacun des deux corps, d'après les principes de l'Électrostatique. Leur différence de potentiel s'appelle la *tension* entre les deux corps.

Considérons ensuite plusieurs métaux A, B, C, ..., F dont chacun touche le suivant, et désignons par V_A, V_B, V_C, ..., V_F leurs potentiels.

Volta a démontré par l'expérience que la différence entre les potentiels V_A et V_F est la même que si les deux corps A et F étaient au contact l'un de l'autre. Si donc F est un métal identique à A, il aura le même potentiel que A.

Courants permanents dans deux conducteurs hétérogènes entre eux, qui se touchent.

10. Supposons deux conducteurs homogènes A et B qui se touchent, formés de deux métaux différents et traversés par des courants permanents. Désignons par V et V_1 le potentiel dans A et B; V et V_1 satisfont aux équations

$$\Delta V = 0, \qquad \Delta V_1 = 0.$$

Désignons par $\varkappa$ et $\varkappa_1$ la conductibilité électrique dans A et B, et par dn et dn_1 les éléments de normale à la surface ω de contact dans A et B. La quantité d'électricité qui, dans l'unité de temps, sort de A en traversant $d\omega$ est égale à $d\omega$ multipliée par la composante normale du courant ou à

$$\varkappa \frac{dV}{dn} d\omega;$$

d'autre part, la quantité d'électricité qui entre dans B dans le même temps par $d\omega$ est

$$-\varkappa_1 \frac{dV_1}{dn_1} d\omega;$$

en écrivant que ces deux quantités sont égales, nous avons l'équation de condition

$$\varkappa \frac{dV}{dn} + \varkappa_1 \frac{dV_1}{dn_1} = 0 \quad \text{sur } \omega;$$

nous avons aussi, d'après le principe de Volta,

$$V - V_1 = C \quad \text{sur } \omega,$$

C étant la tension entre les deux métaux qui forment les conducteurs.

Ensuite nous aurons sur les surfaces libres de A et B

$$\frac{dV}{dn} = 0, \qquad \frac{dV_1}{dn_1} = 0.$$

Enfin supposons, comme précédemment, que le potentiel soit donné sur les surfaces par lesquelles entrent et sortent les courants. On pourra, à l'aide de toutes les équations obtenues, déterminer V et V_1.

Travail produit par le mouvement de l'électricité.

11. Nous supposons encore les courants permanents. Si nous désignons par dx, dy, dz les composantes du déplacement d'une molécule dm d'une des deux électricités dans le temps dt, nous aurons, pour le travail effectué par cette molécule pendant cet instant,

$$-\frac{d\mathrm{V}}{dx}\,dx\,dm-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\,dy\,dm-\frac{d\mathrm{V}}{dz}\,dz\,dm;$$

mais, dans un élément de volume $d\varpi$, il y a des molécules d'électricité des deux signes, animées de vitesses de sens contraire; on a donc pour le travail produit pendant dt sur toutes les molécules situées dans $d\varpi$

$$d\mathfrak{T}=-\frac{d\mathrm{V}}{dx}\Sigma\,dx\,dm-\frac{d\mathrm{V}}{dy}\Sigma\,dy\,dm-\frac{d\mathrm{V}}{dz}\Sigma\,dz\,dm,$$

le signe Σ s'étendant à toutes les molécules situées dans $d\varpi$. Or on a (n° 3)

$$\xi\,d\varpi=\sum\frac{dx}{dt}\,dm,\qquad \eta\,d\varpi=\sum\frac{dy}{dt}\,dm,\qquad \zeta\,d\varpi=\sum\frac{dz}{dt}\,dm,$$

et il en résulte

$$\frac{d\mathfrak{T}}{dt}=-\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\xi+\frac{d\mathrm{V}}{dy}\eta+\frac{d\mathrm{V}}{dz}\zeta\right)d\varpi.$$

Donc, en désignant par T le travail effectué sur le conducteur entier dans l'unité de temps, on aura

$$(\alpha)\qquad \mathrm{T}=-\int\left(\frac{d\mathrm{V}}{dx}\xi+\frac{d\mathrm{V}}{dy}\eta+\frac{d\mathrm{V}}{dz}\zeta\right)d\varpi,$$

l'intégrale étant étendue à tout le volume du conducteur. Or on a

$$\mathrm{R}\xi=-\frac{d\mathrm{V}}{dx},\qquad \mathrm{R}\eta=-\frac{d\mathrm{V}}{dy},\qquad \mathrm{R}\zeta=-\frac{d\mathrm{V}}{dz};$$

il en résulte, pour l'expression de ce travail,

$$T = \int R(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)\, d\varpi$$

ou, plus simplement,

$$T = \int R i^2 d\varpi.$$

Cette expression peut aussi s'écrire

$$T = \frac{1}{R}\int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] d\varpi,$$

et, d'après ce qui a été remarqué (n° 7), si l'on change la fonction V en l'astreignant toutefois aux conditions aux limites, auxquelles satisfait le potentiel de l'électricité, T sera un minimum quand V représentera ce potentiel.

12. On peut transformer l'équation (α) de la manière suivante

$$T = \int V\left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) d\varpi + \int V(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu)\, d\sigma,$$

la dernière intégrale s'étendant à tous les éléments $d\sigma$ de la surface du conducteur, et λ, μ, ν étant les angles de la normale intérieure n avec les axes de coordonnées.

Comme le mouvement est permanent, on a en tout point de l'intérieur du corps

$$\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz} = 0$$

et la première intégrale du second membre est nulle. A la surface libre, on a

$$\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu = 0,$$

de sorte qu'il suffit d'appliquer la seconde intégrale aux surfaces ω par lesquelles entrent et sortent les courants, et il reste

$$T = \int V(\xi\cos\lambda + \eta\cos\mu + \zeta\cos\nu)\, d\omega$$

ou

$$T = \int V i\cos(i, n)\, d\omega.$$

Considérons le cas où le courant entre et sort normalement à la surface du conducteur. Désignons par ω_1 et ω_2 les surfaces d'entrée et de sortie; nous aurons $\cos(i, n) = \pm 1$ sur ces deux surfaces, et, en employant les indices 1 et 2 pour les quantités relatives à ces surfaces, nous aurons

$$T = -\int V_1 i_1 d\omega_1 - \int V_2 i_2 d\omega_2.$$

Mais alors la force électromotrice est normale sur les surfaces ω_1 et ω_2, qui sont donc des surfaces de niveau; par suite, V_1 et V_2 sont constants respectivement sur ω_1 et ω_2; $\int i_1 d\omega_1$ et $\int i_2 d\omega_2$, qui représentent les quantités d'électricité qui traversent ces deux surfaces dans l'unité de temps, doivent être égales à une même quantité Q, et l'on a

$$T = (V_1 - V_2) Q.$$

Échauffement du conducteur.

13. Un corps conducteur étant mis en communication avec une pile constante, il en résultera bientôt dans ce corps un mouvement permanent de l'électricité.

Le travail engendré pendant l'unité de temps dans le conducteur par le mouvement de l'électricité, puisqu'il n'existe aucun travail extérieur, doit être employé entièrement à produire de la chaleur. Or ce travail est représenté par

$$T = \int R i^2 d\varpi,$$

où l'intégrale s'étend à tout le volume du conducteur. En divisant cette quantité par l'équivalent mécanique de la chaleur, on aura la chaleur produite dans le conducteur pendant l'unité de temps.

CHAPITRE II.

LOIS GÉNÉRALES DES COURANTS LINÉAIRES PERMANENTS.

On appelle *conducteur linéaire* un fil métallique dont deux dimensions sont regardées comme très petites par rapport à la troisième. Ordinairement ces fils sont de section circulaire et leur volume peut être considéré comme engendré par le mouvement d'une sphère dont le centre se meut sur une ligne qu'on appelle l'*axe du fil;* mais, en théorie, on peut supposer que la section du fil a une forme quelconque et que sa grandeur varie le long du fil.

Loi de Ohm.

1. Si le fil, traversé par un courant permanent, se trouve dans un milieu isolant, on peut négliger les composantes de l'intensité du courant, perpendiculaires à l'axe, et ne tenir compte que du courant dirigé suivant l'axe.

Désignons par s la longueur d'un arc, pris sur l'axe du fil à partir d'un point déterminé, et par τ sa section. Si le fil est formé d'un seul métal, l'équation qui donne l'intensité du courant est

$$\mathrm{R}i = -\frac{d\mathrm{V}}{ds},$$

où i est l'intensité du courant, V le potentiel électromoteur et R la résistance spécifique du métal.

Mais, si le fil présente des passages d'un métal à un autre et n'a pas la même température dans tous ses points, il en résultera en différentes parties du fil une force électromotrice intérieure Ψ que nous

considérerons comme une fonction de s, et nous avons alors l'équation

$$(a) \qquad Ri = -\frac{dV}{ds} + \Psi.$$

On a ensuite, pour le travail accompli par le mouvement de l'électricité pendant le temps dt et sur une longueur ds du fil,

$$d\varpi = \left(-\frac{dV}{ds} + \Psi\right) \Sigma\, dl\, dm,$$

dm désignant une molécule d'électricité située dans l'élément du fil qui a pour hauteur ds et dl étant la longueur décrite par dm dans dt. Or nous avons (Chap. I, n° 3)

$$\sum \frac{dl}{dt} dm = i\tau\, ds,$$

$\tau\, ds$ étant l'élément de volume. Nous avons donc

$$d\varpi = \left(-\frac{dV}{ds} + \Psi\right) i\tau\, ds\, dt = R i^2 \tau\, ds\, dt.$$

Si nous posons

$$i\tau = I,$$

I représente la somme algébrique de la masse électrique qui traverse τ pendant l'unité de temps dans le sens où s croit; c'est une quantité qui reste constante d'une section à une autre; I s'appelle l'*intensité du courant linéaire*.

D'après cela, si nous désignons par T le travail produit pendant l'unité de temps dans le fil compris entre $s = s_1$ et $s = s_2$, nous aurons

$$(b) \qquad T = I\left(-\int_{s_1}^{s_2} \frac{dV}{ds} ds + \int_{s_1}^{s_2} \Psi\, ds\right).$$

D'après la seconde expression de $d\varpi$, on a aussi, pour la valeur de T,

$$(c) \qquad T = I^2 \int_{s_1}^{s_2} R \frac{ds}{\tau}.$$

Posons

$$-\int \frac{dV}{ds}\,ds + \int \Psi\,ds = E,$$

$$\int R\,\frac{ds}{\tau} = H,$$

les intégrales étant prises entre $s = s_1$ et $s = s_2$. La quantité $-\frac{dV}{ds} + \Psi$ est la force électromotrice en chaque point du fil; $\frac{1}{l}E$ est donc la force électromotrice moyenne le long du fil, et, pour nous conformer à l'usage, nous appellerons E la force électromotrice totale qui agit sur toute la longueur du fil, bien que E ne soit pas homogène avec la quantité précédente. Enfin H est appelé la résistance du fil.

En égalant les deux expressions (b) et (c), on obtient la formule

$$E = HI,$$

qui donne la loi de Ohm :

La force électromotrice totale qui agit sur une portion d'un fil traversé par un courant est égale au produit de l'intensité du courant linéaire par la résistance de cette portion de fil.

C'est à tort que l'on a coutume de restreindre la loi de Ohm à un conducteur homogène; car Ohm a démontré dans son Livre le théorème précédent avec toute la généralité que nous lui avons donnée.

2. Si le fil est homogène, Ψ se réduit à zéro sur toute la longueur du fil, l'expression de E se réduit à son premier terme, et par conséquent la force électromotrice totale se réduit à $V_1 - V_2$, en désignant par V_1 et V_2 la valeur du potentiel aux deux extrémités du fil, et la résistance du fil sera

$$H = R\int \frac{ds}{\tau}.$$

Si le fil est composé de parties homogènes, mais hétérogènes entre elles de longueurs $l, l', l'', \ldots$, la quantité Ψ n'aura de valeurs sensibles que dans les environs des contacts de deux métaux où elle aura une valeur extrêmement grande; ainsi, auprès de ces contacts, Ψ sera

extrêmement grand en comparaison de Ri, et l'on pourra réduire l'équation (a) à

$$\frac{dV}{ds} = \Psi.$$

En intégrant dans une étendue très petite d'un point situé en deçà du contact à un point situé au delà et désignant par V_a et V_b le potentiel en ces deux points, on aura

$$(d) \qquad V_b - V_a = \int \Psi \, ds = K;$$

K est la force électromotrice due au contact. En désignant par ΣK la somme de toutes ces quantités prises sur la longueur du fil et par V_1 et V_2 la valeur du potentiel aux extrémités de ce fil, nous aurons

$$E = V_1 - V_2 + \Sigma K.$$

$V_1 - V_2$ peut être considéré comme la force électromotrice qui provient de l'extérieur; si les deux extrémités du fil sont jointes aux pôles d'une pile, ce sera la force électromotrice produite par la pile.

Si l'on suppose que chaque portion homogène a la même section qui est désignée par τ, on aura pour la résistance

$$H = \sum R \frac{l}{\tau},$$

le signe Σ s'étendant à toutes les portions homogènes du fil.

D'après la formule (d), K représente la différence de potentiel de deux métaux en contact aux environs de ce contact; d'après cela, K doit représenter la tension entre les deux métaux, indiquée par le principe de Volta. C'est ce qu'admettait Ohm; cependant, suivant Thomson, l'expérience donnerait en général pour K une quantité plus petite en valeur absolue que celle-là.

Si certains contacts des métaux sont échauffés à des températures déterminées, les quantités K changeront et dépendront de ces températures.

Loi de Joule et phénomène de Peltier.

3. D'après l'équation (*c*), nous avons

$$T = HI^2.$$

Si l'on a un courant permanent traversant un fil homogène, la force électromotrice totale qui agit sur ce fil proviendra de l'extérieur et se réduira à $V_1 - V_2$. Comme il ne se produit aucun travail extérieur, tout le travail produit par cette force se convertira en chaleur, Donc la quantité de chaleur produite dans ce fil pendant l'unité de temps est

$$\frac{1}{G} HI^2,$$

si l'on désigne par G l'équivalent mécanique de la chaleur. Cette expression constitue la loi de Joule.

Supposons ensuite que le fil soit composé comme ci-dessus de différentes parties hétérogènes entre elles.

D'après la formule (*b*), on a

$$T = EI = I(V_1 - V_2) + I\int \Psi\, ds.$$

Le premier terme du troisième membre représente le travail qui résulte de la force électromotrice $V_1 - V_2$, et le second terme un travail qui se produit aux contacts. Donc, si l'on désigne par E′ la force électromotrice $V_1 - V_2$ qui provient de l'extérieur, le travail produit par cette force dans l'unité de temps sera

$$E'I = EI - I\Sigma K = HI^2 - I\Sigma K,$$

et il devra se transformer en chaleur. Le premier terme représente un travail absorbé par le fil d'après la loi de Joule; le second terme indique une absorption ou un dégagement de chaleur à chaque point de soudure, suivant que K est positif ou négatif. On démontre ainsi le phénomène reconnu par Peltier, qui est donc une conséquence de la

loi de Ohm et du principe de la conservation de l'énergie. C'est au moyen de cette dernière formule que Thomson a déterminé les quantités K.

Formules de Ohm.

4. Soit une suite de conducteurs linéaires homogènes terminés aux points A et B, où entre et sort un courant. Tous ces conducteurs AD_1B, AD_2B, AD_3B, ... ont le même potentiel en A et aussi en B; donc la force électromotrice relative à chacun de ces fils a la même valeur E. Soient R_1, R_2, ... les résistances de ces fils et I_1, I_2, ... les intensités des courants dans chacun de ces fils; nous aurons donc

$$E = I_1R_1 = I_2R_2 = \dots,$$

et l'on peut aussi écrire

$$E = IR,$$

en désignant par I l'intensité totale des courants et par R la résistance totale du conducteur formé par les conducteurs linéaires précédents. Nous aurons donc

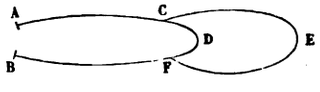
$$I = I_1 + I_2 + \dots$$

et, en remplaçant I_1, I_2, ... et I d'après les équations précédentes, on a la formule

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} + \dots.$$

Comme exemple, prenons un fil lié aux pôles A et B (*fig.* 1) d'une

Fig. 1.



pile, et qui se bifurque en C et F suivant CDF, CEF. Soient r et r' les résistances de CDF et CEF, et R la résistance de leur ensemble, on a

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{r'} \qquad \text{ou} \qquad R = \frac{rr'}{r + r'}.$$

Si l'on désigne par R_1 et R_2 les résistances de AC et BF, la résistance totale du conducteur sera $R + R_1 + R_2$, et, en désignant par E la force électromotrice totale et par I l'intensité du courant dans AC et BF, on aura

$$I = \frac{E}{R + R_1 + R_2}.$$

Nous avons ensuite, en désignant par i et i' les intensités des courants qui traversent CDF et CEF,

$$ir = i'r' = IR$$

ou

$$i = \frac{IR}{r}, \qquad i' = \frac{IR}{r'}.$$

On a ainsi déterminé R, I, i, i'.

Ces formules élémentaires ont été données pour la première fois par Ohm.

5. Dans ce qui précède, nous avons considéré des conducteurs linéaires traversés par des courants, en faisant abstraction de la pile qui excite le mouvement de l'électricité. Or Ohm a admis, puis vérifié par l'expérience, qu'une pile hydro-électrique a une résistance constante, c'est-à-dire indépendante de l'intensité du courant. Ainsi, considérons dans un circuit galvanique la pile et deux portions de fil homogène PA et P'B, fixées aux pôles P et P' de la pile, et que nous regardons comme terminées en A et B. Désignons par V_1 et V_2 les potentiels des fils aux points A et B, par E la force électromotrice produite par la pile et par r, r', r'' les résistances des fils PA, P'B et de la pile; $R = r + r' + r''$ sera la résistance de l'ensemble, et nous aurons

$$RI = E + V_1 - V_2.$$

Si l'on considère un circuit entier formé par la pile et un fil, il faudra faire coïncider les points A et B, et l'on aura

$$RI = E,$$

R étant la résistance de la pile et du fil conducteur homogène qui joint les deux pôles.

Sur la distribution des courants dans un réseau linéaire.

6. On a un système de n fils conducteurs, reliés entre eux par leurs extrémités; dans chacun d'eux peut se trouver le siège d'une force électromotrice, et il s'agit de déterminer les intensités $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des courants qui traversent chacun de ces n fils.

Nous allons donner les équations employées par Kirchhoff pour résoudre ce problème.

Étant donnés deux points quelconques C et D pris sur les fils du système, nous admettrons qu'on puisse aller de C à D en suivant les fils. S'il en était autrement, on pourrait diviser le système en deux ou plusieurs qui satisferaient à cette condition et qui seraient indépendants l'un de l'autre.

Rappelons ce théorème de Géométrie élémentaire trouvé par Euler :

Si, dans un polyèdre, on désigne par S *le nombre des sommets, par* F *le nombre des faces et par* A *le nombre des arêtes, on a cette formule*

$$(a) \qquad S + F = A + 2.$$

On voit facilement que ce théorème revient à celui-ci : Découpons toute la surface d'une sphère en différents polygones sphériques et désignons par F le nombre des polygones, par S le nombre de leurs sommets distincts et par A le nombre de leurs côtés distincts; alors nous aurons encore l'équation (a).

Cela posé, $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ étant les points de croisement dans le réseau des fils, prenons sur la surface d'une sphère des points correspondants $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ et joignons par un arc de grand cercle tout couple de ces points qui correspond à deux points réunis par un fil. Nous pourrons choisir les points $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$, de manière qu'il n'y ait pas d'autres points de rencontre des arcs de grands cercles que $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$.

Désignons par N le nombre des fils, par C le nombre des points de croisement du réseau et par P le nombre des polygones sphériques renfermés dans la projection du réseau sur la sphère, ces polygones étant supposés extérieurs les uns aux autres. Puis appliquons le théorème précédent. Les sommets correspondent aux points de croisement;

donc S = C. Les côtés sont les images des fils; donc A = N. La surface de la sphère renferme, outre les P polygones, un polygone extérieur à la projection du réseau; on a donc F = P + 1. Ainsi l'équation (*a*) donne

$$P = N + 1 - C.$$

On peut aussi définir P comme le plus petit nombre de fils qu'il faut supprimer dans le réseau pour qu'il n'y ait plus de circuit fermé.

En effet, considérons les circuits qui se projettent sur les polygones sphériques. Si l'on enlève un fil situé sur le bord extérieur, on supprime un circuit; si l'on enlève un fil intérieur, deux circuits qui se touchent par ce fil se changeront en un seul. Et, si l'on ôte successivement un fil de manière à diminuer à chaque fois d'une unité le nombre des circuits, on voit qu'il faut retirer P fils pour supprimer les P circuits.

On aurait pu considérer P circuits autres que ceux qui ont pour images les polygones tracés sur la sphère.

7. Énonçons ensuite deux théorèmes employés par Kirchhoff :

THÉORÈME I. — *Si les fils* 1, 2, 3, ..., *p aboutissent au même point, on a*

$$(A) \qquad I_1 + I_2 + \ldots + I_p = 0,$$

I_1, I_2, ..., I_p *étant les intensités des courants qui traversent ces fils et étant pris positifs ou négatifs suivant que les courants vont vers le point de croisement ou s'en éloignent.*

THÉORÈME II. — *Si les fils* 1, 2, ..., *q forment un circuit fermé; que* R_1, R_2, ... *soient les résistances de ces fils, et* E_1, E_2, ... *les forces électromotrices qui s'y trouvent, on a l'équation*

$$(B) \qquad R_1 I_1 + R_2 I_2 + \ldots + R_q I_q = E_1 + E_2 + \ldots + E_q,$$

I_1, I_2, ... *étant comptés comme positifs dans le même sens du circuit, ainsi que* E_1, E_2, ...

Le théorème I se déduit de ce qu'il sort de chaque point de croisement autant d'électricité qu'il en entre.

Pour démontrer le théorème II, appliquons la loi de Ohm à un des fils du circuit; nous aurons

$$R_i I_i = E_i + V_i - V_{i+1}, \tag{2}$$

V_i et V_{i+1} étant la valeur du potentiel aux deux extrémités du fil. Si l'on ajoute toutes les équations semblables relatives à chaque côté du circuit, les potentiels disparaissent et il reste l'équation (B).

Il existe autant d'équations semblables à (A) qu'il y a de points de croisement; ainsi il y en a C, mais $C - 1$ de ces équations seulement sont distinctes; car, si l'on ajoute toutes ces équations, chaque intensité de courant se présentera deux fois, mais avec des signes contraires, et la somme des premiers membres se réduira à zéro.

Appliquons l'équation (B) à P circuits distincts, par exemple aux P circuits qui ont été projetés sur la sphère suivant les polygones sphériques dont nous avons parlé (n° 6).

Les formules (A) et (B) fourniront ainsi un nombre d'équations égal à

$$C - 1 + P = N,$$

c'est-à-dire égal au nombre des inconnues I.

Il est bien aisé de voir que l'équation (B), appliquée à tout autre circuit que les P circuits qui ont été indiqués, rentrera dans les P équations relatives à ces circuits. D'ailleurs ces P équations sont distinctes, car on peut prendre les P circuits dans un ordre tel que chacun renferme un fil qui ne soit pas dans les circuits suivants. Ainsi, chaque équation renfermera une quantité I qui ne se trouvera pas dans les suivantes; par suite, chaque équation ne peut être une conséquence des suivantes : elles sont donc toutes distinctes.

Nous avons cru utile de donner les considérations précédentes. Mais les N équations à résoudre sont de deux formes différentes (A) et (B); de plus, si l'on prend maintenant la lettre I affectée d'indices pour représenter les valeurs positives des intensités des courants, il faudra les faire précéder dans ces équations tantôt du signe +, tantôt du signe —. Il en résulte que la résolution générale de ces équations présente assez de difficulté et même que la règle donnée par Kirchhoff pour leur résolution n'est pas commode. Aussi est-il préférable de suivre une autre marche pour résoudre le problème actuel.

Autre solution du problème précédent.

8. Au lieu de déterminer d'abord les intensités des courants dans chaque fil du réseau, on peut rechercher les potentiels aux points de croisement et l'on en conclura les intensités des courants dans chaque fil par la formule (2) du n° 7. Mais, pour que les équations se présentent sous la forme la plus commode, ajoutons aux fils du réseau d'autres fils qui joignent tout couple de sommets qui n'étaient pas réunis. Pour revenir au cas précédent, il suffira de supposer que la résistance est infinie ou la conductibilité nulle dans chacun des fils ajoutés.

Nous désignerons les sommets par 1, 2, 3, ..., p; le potentiel au point a sera V_a, l'intensité du courant sera I_{ab} dans le fil qui va du sommet a au sommet b, E_{ab} sera la force électromotrice située dans ce fil et k_{ab} la conductibilité de ce fil, c'est-à-dire l'inverse de sa résistance. D'après ces désignations, on a évidemment

$$I_{ab} = -I_{ba}, \qquad E_{ab} = -E_{ba}, \qquad k_{ab} = k_{ba}.$$

D'après le théorème I du n° 7, on a à chaque sommet a

$$I_{a1} + I_{a2} + \ldots + I_{ap} = 0; \tag{1}$$

ensuite, d'après la loi de Ohm, on a, dans chaque fil ab,

$$I_{ab} = k_{ab}(V_a - V_b + E_{ab}). \tag{2}$$

Substituons cette expression dans l'équation (1), et nous aurons

$$-(k_{a1} + k_{a2} + \ldots + k_{ap})V_a + (k_{a1}V_1 + k_{a2}V_2 + \ldots + k_{ap}V_p) = k_{a1}E_{a1} + k_{a2}E_{a2} + \ldots + k_{ap}E_{ap}.$$

Le symbole k_{aa} n'a jusqu'ici aucune signification; pour simplifier cette équation, introduisons-le en faisant

$$k_{aa} = -k_{a1} - k_{a2} - \ldots - k_{ap}, \tag{3}$$

et cette équation deviendra

$$\left\{\begin{array}{l} k_{a1}V_1 + k_{a2}V_2 + \ldots + k_{aa}V_a + \ldots + k_{ap}V_p \\ \quad = k_{a1}E_{a1} + k_{a2}E_{a2} + \ldots + k_{ap}E_{ap}. \end{array}\right. \tag{4}$$

Si nous faisons successivement $a = 1, 2, \ldots, p$, nous aurons p équations entre $V_1, V_2, \ldots, V_p$; toutefois ces équations se réduisent au nombre $p - 1$; car, si nous les ajoutons, nous obtiendrons zéro pour chaque membre de l'équation résultante. En effet, dans le second membre, tout terme $k_{as}E_{as}$ sera accompagné du terme $k_{sa}E_{sa}$ égal et de signe contraire, et le premier membre est aussi nul d'après l'équation (3).

Résolvons donc les $p - 1$ premières équations (4) par rapport à $V_1, V_2, \ldots, V_{p-1}$. Posons

$$D = \begin{matrix} k_{1,1} & k_{1,2} & \ldots & k_{1,p-1} \\ k_{2,1} & k_{2,2} & \ldots & k_{2,p-1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ k_{p-1,1} & k_{p-1,2} & \ldots & k_{p-1,p-1} \end{matrix}$$

et désignons par $D_{r,s}$ le déterminant qui reste quand on supprime dans D la ligne horizontale de rang r et la ligne verticale de rang s; nous aurons

$$D = k_{r1}D_{r1} + k_{r2}D_{r2} + \ldots + k_{r,p-1}D_{r,p-1}$$

et, en multipliant les équations (4) respectivement par $D_{r1}, D_{r2}, \ldots, D_{r,p-1}$ et ajoutant, nous aurons

$$\begin{aligned} DV_r = {} & + (* + k_{12}E_{12} + \ldots + k_{1p}E_{1p})D_{r1} - V_p k_{1p}D_{r1} \\ & + (k_{21}E_{21} + * + \ldots + k_{2p}E_{2p})D_{r2} - V_p k_{2p}D_{r2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + (k_{p-1,1}E_{p-1,1} + k_{p-1,2}E_{p-1,2} + \ldots + *)D_{r,p-1} - V_p k_{p-1,p}D_{r,p-1}. \end{aligned}$$

Le coefficient de V_p dans le second membre est

$$-(k_{1p}D_{r1} + k_{2p}D_{r2} + \ldots + k_{p-1,p}D_{r,p-1}).$$

Or on a

$$k_{i,p} = k_{p,i} = -k_{1,i} - k_{2,i} - \ldots - k_{p-1,i}.$$

Faisons dans cette formule $i = 1, 2, \ldots, p - 1$ et substituons dans le coefficient de V_p, puis supprimons les sommes qui sont nulles; il restera

$$k_{1r}D_{r1} + k_{2r}D_{r2} + \ldots + k_{p-1,r}D_{r,p-1} = D.$$

On a donc enfin

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{D}(\mathrm{V}_r - \mathrm{V}_p) = +(\star + k_{12}\mathrm{E}_{12} + \ldots + k_{1,p}\mathrm{E}_{1,p})\mathrm{D}_{r,1} \\ \qquad\qquad\quad + (k_{21}\mathrm{E}_{21} + \star + \ldots + k_{2,p}\mathrm{E}_{2,p})\mathrm{D}_{r,2} \\ \qquad\qquad\quad + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On peut donc déterminer la différence du potentiel de chaque sommet avec celui du sommet p. On peut donc aussi déterminer la différence de potentiel de deux sommets quelconques et, d'après la formule (2), on en déduira l'intensité du courant dans le fil qui joint ces deux sommets.

9. Démontrons le théorème suivant remarqué par Kirchhoff :

Si une force électromotrice agit seule et dans le fil conducteur ab terminé en a et b, elle produira dans le fil rs le même courant que cette force électromotrice mise dans rs produirait dans ab.

Si la force électromotrice E_{ab} agit seule et le long de ab, l'équation (5) appliquée au sommet r ne renfermera que deux termes dans son second membre et l'on aura

$$\mathrm{D}(\mathrm{V}_r - \mathrm{V}_p) = k_{ab}\mathrm{E}_{ab}(\mathrm{D}_{ra} - \mathrm{D}_{rb});$$

on aura de même

$$\mathrm{D}(\mathrm{V}_s - \mathrm{V}_p) = k_{ab}\mathrm{E}_{ab}(\mathrm{D}_{sa} - \mathrm{D}_{sb}).$$

En retranchant ces deux égalités entre elles, on a

$$\mathrm{D}(\mathrm{V}_r - \mathrm{V}_s) = k_{ab}\mathrm{E}_{ab}(\mathrm{D}_{ra} - \mathrm{D}_{rb} - \mathrm{D}_{sa} + \mathrm{D}_{sb}),$$

et, par suite, le courant produit dans rs sera

$$k_{rs}(\mathrm{V}_r - \mathrm{V}_s) = \frac{1}{\mathrm{D}} k_{rs}k_{ab}\mathrm{E}_{ab}(\mathrm{D}_{ra} - \mathrm{D}_{rb} - \mathrm{D}_{sa} + \mathrm{D}_{sb}).$$

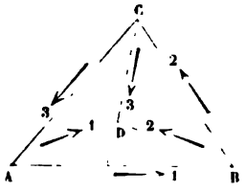
En permutant dans le second membre a et b avec r et s, on ne changera pas le second membre si l'on suppose $\mathrm{E}_{ab} = \mathrm{E}_{rs}$; ce qui démontre le théorème.

On voit aussi que la condition pour qu'il n'y ait pas de courant dans le second fil est la suivante

$$\mathrm{D}_{ra} - \mathrm{D}_{rb} - \mathrm{D}_{sa} + \mathrm{D}_{sb} = 0.$$

EXEMPLE. — Quand le réseau est peu compliqué, on peut employer indifféremment les deux méthodes. Appliquons, par exemple, les équations de Kirchhoff au pont de Wheatstone. Cet appareil se compose de six fils qui joignent quatre points A, B, C, D (*fig.* 2). Une pile

Fig. 2.



est introduite sur le côté AB et y produit la force électromotrice E. Considérons les courants comme positifs sur les six fils quand ils sont dans les directions indiquées par les flèches. Soient i_1, i_2, i_3, I_1, I_2, I_3 les intensités des courants et r_1, r_2, r_3, R_1, R_2, R_3 les résistances respectivement dans les fils AB, BC, CA, AD, BD, CD.

Le théorème I du n° 7 appliqué aux sommets A, B, C donne les équations

$$(1) \qquad i_1 - i_2 - I_2 = 0, \qquad i_2 - i_3 - I_3 = 0, \qquad i_3 - i_1 - I_1 = 0,$$

et le théorème II appliqué aux circuits ABD, BCD, CAD fournit les trois équations

$$(2) \qquad \begin{cases} E = r_1 i_1 + R_2 I_2 - R_1 I_1, \\ 0 = r_2 i_2 + R_3 I_3 - R_2 I_2, \\ 0 = r_3 i_3 + R_1 I_1 - R_3 I_3. \end{cases}$$

De ces équations on tire facilement les six inconnues i et I; en tirant les I des équations (1) pour les porter dans les équations (2), on obtiendra trois équations entre les intensités i.

Action des courants sur les aimants.

10. Il résulte des faits de l'expérience que les courants électriques exercent des actions sur les aimants et que, par conséquent, réciproquement, d'après le principe de la réaction, les aimants agissent sur

les courants. Les actions entre les courants et les aimants sont dites *actions électromagnétiques*.

Considérons un courant linéaire fermé agissant sur l'unité positive de magnétisme située au point (x, y, z); chaque partie élémentaire du courant agira sur ce point. Mais n'examinons d'abord que l'action totale du courant sur ce point. L'hypothèse la plus simple qu'on puisse faire consiste à admettre que les composantes totales X, Y, Z de la force produite par le courant sur ce point sont les dérivées partielles d'une même fonction par rapport à x, y, z, en sorte qu'on peut poser

$$X = -\frac{dP}{dx}, \qquad Y = -\frac{dP}{dy}, \qquad Z = -\frac{dP}{dz};$$

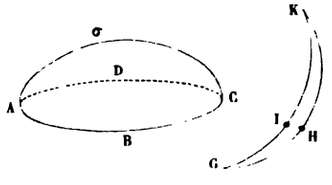
admettons, de plus, que X, Y, Z sont des fonctions continues en dehors du courant et que P satisfait en dehors de ce courant à l'équation du potentiel

$$\Delta P = 0;$$

enfin admettons que P s'annule comme un potentiel à l'infini. Riemann a, je crois, reconnu le premier qu'on peut déduire de cette hypothèse les faits électromagnétiques relatifs aux courants linéaires fermés. Nous appellerons P le potentiel magnétique du courant.

11. Soit ABCD (*fig.* 3) le courant fermé, et soient GIK, GHK deux

Fig. 3.



courbes infiniment voisines qui se terminent aux points G et K et qui n'enlacent pas le courant. Prenons l'intégrale

$$\Omega = \int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$$

le long de chacune des deux lignes GIK et GHK; je dis qu'elle y aura des valeurs égales.

Supposons que non seulement la fonction P soit continue sur les courbes GIK et GHK, mais qu'elle le soit également dans le passage d'un point de l'une des courbes à un point infiniment voisin situé sur l'autre. D'après les valeurs de X, Y, Z, l'intégrale Ω prise le long d'une de ces deux courbes peut s'écrire

$$\Omega = -\int \frac{dP}{ds}\,ds,$$

ds étant un élément de la courbe. Concevons ensuite que les points I et H se meuvent en même temps sur les deux courbes en restant infiniment rapprochés et qu'ils partent ensemble de G et arrivent ensemble en K.

En prenant l'intégrale le long de GI et le long de GH, nous aurons

$$-\int \frac{dP}{ds}\,ds = P_G - P_I, \qquad -\int_{GH} \frac{dP}{ds}\,ds = P_G - P_H,$$

les indices de P indiquant les points où l'on prend le potentiel P. La différence de ces deux intégrales est $P_H - P_I$, quantité infiniment petite, puisque I et H sont infiniment voisins; et, quand les points I et H arrivent en K, la différence des deux intégrales est nulle. Ainsi l'intégrale Ω prise le long de GIK est égale à cette intégrale prise le long de GHK. Enfin, comme on peut supposer qu'une des deux courbes se déforme successivement en s'éloignant de l'autre, l'intégrale, prise le long des deux courbes, aura la même valeur, quand même elles s'écarteront l'une de l'autre d'une manière finie.

12. Dans ce qui précède, la fonction P n'entre que par ses dérivées, et elle n'est pas complètement déterminée par les conditions auxquelles on l'a assujettie. Ajoutons maintenant cette autre condition que la fonction P est partout finie et continue, excepté à travers une certaine surface σ dont le bord est sur la courbe ABCD.

Désignons par P′ et par P″ les valeurs de P sur l'un et l'autre côté de la surface σ. Des deux côtés de la surface σ, les dérivées de P′ et P″ suivant des directions tangentes à la surface sont égales, et la fonction P varie d'une manière continue sur chaque côté de cette surface. Si donc, en un point de σ et de part et d'autre de σ, on prend pour P

des valeurs qui diffèrent de B, les valeurs de P′ et P″ différeront de B dans toute l'étendue de la surface σ. Ainsi l'on peut poser

$$P' - P'' = B,$$

B étant une constante quelconque.

La constante B étant supposée donnée, on peut prouver facilement que la fonction P est complètement déterminée.

Expression du potentiel magnétique.

13. Nous allons déterminer une expression du potentiel magnétique du courant.

Soient U et P deux fonctions des coordonnées a, b, c d'un point quelconque de l'espace ϖ, limité par la surface ω; on a l'équation connue

$$\int P\,\Delta U\,d\varpi - \int U\,\Delta P\,d\varpi = -\int P\,\frac{dU}{dn'}\,d\omega + \int U\,\frac{dP}{dn'}\,d\omega,$$

dn' étant l'élément de normale à ω, menée intérieurement (*Théorie du potentiel*, Chap. I, n° 10).

Prenons $U = \frac{1}{r}$, r étant la distance d'un point (x, y, z) situé dans ϖ à l'élément $d\varpi$ ou $d\omega$, et prenons pour P la fonction du numéro précédent.

Du point (x, y, z) comme centre décrivons une sphère d'un rayon infiniment petit et une autre sphère d'un rayon R extrêmement grand. Ensuite, comme la fonction P est discontinue à travers la surface σ, menons deux surfaces σ_1 et σ_2 infiniment près de σ et de part et d'autre de cette surface. Enfin appliquons cette équation au volume compris entre les deux sphères, diminué de la couche comprise entre σ_1 et σ_2.

Dans tout cet espace, on a $\Delta U = 0$, $\Delta P = 0$, et, en désignant par $d\sigma'$ les éléments de la surface de la sphère infiniment petite et par $d\sigma$ les éléments des autres surfaces limitantes, on obtient

$$0 = -\int P\,\frac{dr^{-1}}{dn'}\,d\sigma + \int \frac{1}{r}\,\frac{dP}{dn'}\,d\sigma$$
$$-\int P\,\frac{dr^{-1}}{dr}\,d\sigma' + \int \frac{1}{r}\,\frac{dP}{dr}\,d\sigma'.$$

On trouve ensuite facilement

$$\lim \int \frac{1}{r} \frac{d\mathrm{P}}{dr} d\sigma' = 0, \qquad \lim \int \mathrm{P} \frac{dr^{-1}}{dr} d\sigma = -4\pi \mathrm{P},$$

P désignant dans le dernier membre la valeur de P au point (x, y, z), qu'on déduit donc de la valeur de P donnée, en remplaçant a, b, c par x, y, z. Il reste donc

$$4\pi \mathrm{P} = \int \mathrm{P} \frac{dr^{-1}}{dn'} d\sigma - \int \frac{1}{r} \frac{d\mathrm{P}}{dn'} d\sigma,$$

où les intégrales du second membre s'étendent à la fois à la surface de la sphère de rayon R et aux deux surfaces σ_1 et σ_2. Celles qui se rapportent à la sphère sont nulles pour $\mathrm{R} = \infty$, comme on le reconnaît facilement. Il suffit donc de prendre ces intégrales sur les surfaces σ_1 et σ_2. Or, comme les dérivées de P varient partout d'une manière continue et que dn' est mené en sens contraire sur σ_1 et σ_2, $\frac{d\mathrm{P}}{dn'}$ y prend des valeurs égales et de signe contraire. Ainsi la dernière intégrale est entièrement nulle et l'on a

$$4\pi \mathrm{P} = \int (\mathrm{P}' - \mathrm{P}'') \frac{dr^{-1}}{dp} d\sigma,$$

dp étant l'élément de normale à σ_1 mené en dehors de l'espace compris entre σ_1 et σ_2 : dp est donc aussi l'élément de normale mené à σ du côté où $\mathrm{P} = \mathrm{P}'$.

En remplaçant $\mathrm{P}' - \mathrm{P}''$ par sa valeur constante P, on obtient

$$\mathrm{P} = \frac{\mathrm{B}}{4\pi} \int \frac{dr^{-1}}{dp} d\sigma.$$

Cette expression est identique à celle du potentiel d'une double couche magnétique dont la puissance est constante dans toute son étendue et égale à $\frac{\mathrm{B}}{4\pi}$ (*Théorie du potentiel*, IIe Partie, Chap. IV, n° 11). On obtient ainsi un théorème donné par Ampère, qui peut s'énoncer ainsi :

L'action d'un courant linéaire fermé sur une particule magnétique peut être remplacée par celle d'une double couche magnétique de puissance con-

stante et limitée à la ligne du courant. La forme de cette double couche est d'ailleurs arbitraire.

14. Les composantes X, Y, Z de l'action du courant sur le point (x, y, z) sont proportionnelles à l'intensité du courant, et, comme elles sont exprimées par les dérivées de P changées de signe, P est aussi proportionnel à I; donc B est une constante qui contient I en facteur, et l'on peut poser l'égalité

$$\frac{B}{4\pi} = \beta I,$$

où β est indépendant de I.

La constante β dépendra de l'intensité du courant linéaire choisie pour unité. Pour avoir les formules les plus simples, prenons cette unité, de manière que β soit égal à 1; nous emploierons ainsi l'unité de courant adoptée par W. Weber et ensuite par la plupart des physiciens. Nous avons donc

$$B = 4\pi I$$

et

$$(a) \qquad P = I \int \frac{d\frac{1}{r}}{dp} d\sigma.$$

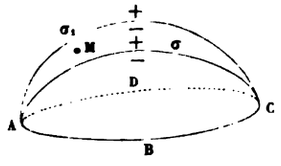
Concevons qu'un observateur se tienne normalement sur le côté positif de la double couche magnétique, c'est-à-dire sur le côté qui tend à se diriger vers le nord. Alors, si V est égal à V′ sur ce côté, la quantité $B = V' - V''$ sera positive, et l'expérience prouve que, pour l'observateur, le courant tourne de droite à gauche.

Ensuite, d'après un théorème connu sur les doubles couches et qui est d'ailleurs une conséquence facile de la formule (a), on obtient le résultat suivant :

Le potentiel P, pris en un point M ou (x, y, z), est égal à l'intensité I du courant, multipliée par la surface sphérique ω, dont le rayon est l'unité et le centre en M et qui est interceptée par le cône qui, ayant son sommet en M, s'appuie sur la ligne du courant. Et l'on regarde la surface ω comme positive ou négative, suivant que la surface σ tourne le côté positif ou négatif au point M.

15. Nous avons mené arbitrairement la surface σ par la ligne ABCD (*fig.* 4) du courant. Mais, si la surface σ, étant déformée, franchit le point M et vient en σ_1, P subit un accroissement égal à $\mp 4\pi I$, suivant que le point M, après avoir été du côté positif de la couche, se trouve du côté négatif ou réciproquement,

Fig. 4.



Ainsi, quand la surface se change de σ en σ_1, la valeur de la fonction P varie dans l'intervalle de σ à σ_1; mais sa valeur reste la même en dehors de cet intervalle. Quant aux dérivées de P, qui donnent l'action du courant sur le point M, elles ne dépendent pas de la forme de la surface σ.

Décomposons la surface σ en éléments et la couche magnétique en éléments correspondants. L'action de chacun de ces éléments de couche peut être remplacée par celle d'un courant d'intensité I qui passe par le bord de cet élément, et un observateur placé sur le côté positif d'un quelconque de ces éléments de couche magnétique verra le courant correspondant tourner de droite à gauche. Ainsi un courant linéaire fermé S peut être remplacé par un réseau de courants élémentaires de même intensité et qui tournent tous dans le même sens, ce réseau se terminant au contour S. Au reste, il est aisé de voir que chaque côté du réseau qui n'est pas sur la ligne S est traversé par deux courants égaux et de sens contraire, ce qui rend la proposition évidente.

Valeur de $\int \frac{dP}{ds} ds$.

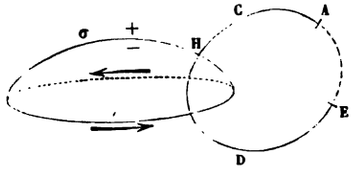
16. Si l'on prend l'intégrale $\int \frac{dP}{ds} ds$ le long d'une ligne qui ne traverse pas la surface σ et qu'on désigne par P_1 et P_2 la valeur du poten-

tiel P au commencement et à la fin de cette ligne, on a

$$\int \frac{dP}{ds}\, ds = P_2 - P_1.$$

Cherchons ensuite la valeur de cette intégrale prise le long de la ligne ACDE (*fig.* 5) qui traverse la surface σ limitée au courant. Désignons par P′ et P″ les valeurs que prend P de part et d'autre de la surface au point H, où cette ligne la traverse. L'intégrale, prise le long

Fig. 5.



de ACH, a pour valeur $P' - P_1$ et, prise le long de HDE, elle est égale à $P_2 - P''$; donc nous obtenons pour la même valeur prise le long de ACHDE

$$\int \frac{dP}{ds}\, ds = (P' - P_1) + (P_2 - P'') = P_2 - P_1 + B,$$

puisque $P' - P''$ est égal à B.

Si la ligne S, qui joint le point A au point E, traversait la surface σ toujours dans le même sens un nombre n de fois, on aurait

$$\int \frac{dP}{ds}\, ds = P_2 - P_1 + nB,$$

et, si la courbe était fermée, en sorte que le point E coïncidât avec A, P_2 serait égal à P_1 et l'on aurait

$$\int \frac{dP}{ds}\, ds = nB;$$

cette quantité, changée de signe, représente le travail qu'accomplirait l'unité de fluide positif magnétique en parcourant le circuit fermé que nous venons d'indiquer.

En prenant la même intégrale le long d'une ligne fermée ACDA qui

enlace le courant une fois seulement, nous aurons

$$B = -\int \frac{dP}{ds}\, ds;$$

et, en remplaçant B par sa valeur $4\pi I$, nous obtiendrons

$$I = \frac{1}{4\pi}\int \frac{dP}{ds}\, ds = -\frac{1}{4\pi}\int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz).$$

Si l'on prend l'intégrale en sens contraire, c'est-à-dire le long de ADCA, on aura

$$I = \frac{1}{4\pi}\int (X\, dx + Y\, dy + Z\, dz),$$

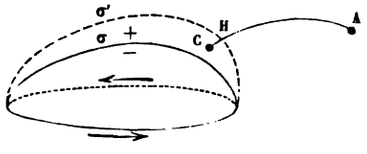
et le chemin d'intégration est ainsi pris le long d'une courbe fermée qui enlace le courant, de manière à traverser la surface σ du côté négatif au côté positif.

17. Il est facile de vérifier que la valeur de $\int \frac{dP}{ds}\, ds$ prise le long d'une ligne donnée ne dépend pas de la surface menée par le courant. En effet, si l'on prend cette intégrale le long de la ligne AC, en adoptant la surface σ, on a

$$(a) \qquad \int_{AC} \frac{dP}{ds}\, ds = P_2 - P_1.$$

Prenons ensuite au lieu de σ une surface σ', telle que le point C (*fig.* 6) se trouve entre σ et σ'; le potentiel en C deviendra $P'_2 = P_2 - B$.

Fig. 6.



Désignons par P_H et P'_H les valeurs de P au point H sur le côté positif et le côté négatif de σ'; nous aurons

$$\int_{AC} \frac{dP}{ds}\, ds = (P_H - P_1) + (P'_2 - P'_H)$$
$$= (P'_2 - P_1) + (P_H - P'_H) = P'_2 - P_1 + B,$$

et, en remplaçant P'_2 par sa valeur, on retrouve pour l'intégrale la valeur (a).

Travail produit sur une double couche par un système magnétique.

18. Soient, en général, deux aimants H et H_1, et représentons par P le potentiel magnétique de H; nous aurons pour le potentiel de l'un des aimants sur l'autre (*Théorie du potentiel,* IIe Partie, Chap. IV, n° 4)

$$W = \int \left(A \frac{dP}{dx'} + B \frac{dP}{dy'} + C \frac{dP}{dz'} \right) d\varpi,$$

A, B, C étant les composantes du moment magnétique dans chaque élément $d\varpi$ de l'aimant H_1; x', y', z' sont les coordonnées de $d\varpi$ et l'intégrale est étendue à tous les éléments du volume de H_1.

Prenons pour l'aimant H_1 une double couche magnétique Γ de puissance constante et désignons par λ, μ, ν les angles directeurs de la normale, menée à la couche du côté positif; nous aurons

$$A\, d\varpi = \varphi\, d\sigma \cos\lambda, \qquad B\, d\varpi = \varphi\, d\sigma \cos\mu, \qquad C\, d\varpi = \varphi\, d\sigma \cos\nu,$$

φ étant la puissance magnétique de la couche et $d\sigma$ son élément de surface. Il en résulte

$$W = \varphi \int \left(\frac{dP}{dx'} \cos\lambda + \frac{dP}{dy'} \cos\mu + \frac{dP}{dz'} \cos\nu \right) d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue à toute la surface de Γ.

Désignons par Ψ la composante normale à $d\sigma$ de la force F, qui provient de l'aimant H; cette formule deviendra

$$W = -\varphi \int \Psi\, d\sigma = -\varphi Q.$$

La quantité Q représente le flux de force, provenant de H, qui traverse σ.

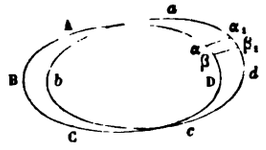
19. Supposons que, l'aimant ou système magnétique H restant fixe, la couche Γ éprouve un déplacement infiniment petit; il en résultera un travail égal à

$$-dW = \varphi\, dQ.$$

La couche Γ peut être remplacée par une autre couche quelconque ayant le même bord et la même puissance magnétique. Si donc Γ s'est déplacé en Γ′ et son bord s en s', nous pouvons imaginer une surface ω passant par s et s', et remplacer les surfaces de Γ et de Γ′ respectivement par les parties de ω comprises dans s et dans s' (il est évident qu'en général ces deux lignes ne se rencontrent pas).

Ainsi, la ligne s ou ABCD (*fig.* 7) étant venue en s' ou *abcd*, si nous

Fig. 7.



désignons par q le flux de force qui traverse la partie annulaire de ω comprise entre s et s', nous aurons

$$-dW = \varphi q.$$

Divisons cet anneau en rectangles infiniment petits, dont deux côtés soient sur s et s'. Le flux de force qui traverse un de ces rectangles $\alpha\beta\beta_1\alpha_1$ est

$$F\cos(F, N)\,ds \times \alpha\alpha_1,$$

F étant la force magnétique qui provient du système magnétique H, N la normale positive menée à ω et ds l'élément $\alpha\beta$. Cette expression représente le volume d'un parallélépipède construit sur le rectangle $\alpha\beta\beta_1\alpha_1$ et sur F pris pour arête. Désignons par γ l'angle de F avec ds; ce volume a aussi pour mesure

$$(a) \qquad F\,ds\sin\gamma.h,$$

h étant la perpendiculaire abaissée de α_1 sur le plan mené par ds et par F.

Imaginons une force qui ait pour grandeur $F\,ds\sin\gamma$, qui soit parallèle à la ligne h, mais de sens contraire, et qui transporte ds en ds'; le travail de cette force sera donné par l'expression (a). La quantité q

est la somme des quantités (a) et l'on a

$$-dW = \varphi \int F h \sin\gamma \, ds.$$

Ainsi le travail produit sur la double couche Γ par le système magnétique est le même que celui qui serait produit par des forces fictives $\varphi F \sin\gamma \, ds$, agissant sur chaque élément ds du contour de Γ, perpendiculairement au plan mené par F et ds, pour transporter ds en ds'.

Comme l'action du système magnétique sur la double couche est la même que sur un courant linéaire parcourant la ligne s, ce théorème s'applique aussi à l'action d'un système magnétique sur un courant.

Théorèmes auxiliaires.

20. Une surface σ étant terminée à une ligne S, concevons que cette ligne soit parcourue par un point M dans le sens où il sera convenu qu'on fait croître l'arc s pris sur S à partir d'un point fixe. Menons une normale à σ, commençant à cette surface et dans un sens tel que l'observateur placé suivant la normale, les pieds sur la surface, voie le mouvement du point M s'effectuer de droite à gauche. Cette normale sera dite *positive,* ainsi que le côté correspondant de la surface. Cette définition est nécessaire aux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Si u est une fonction qui varie avec la position d'un point* (x, y, z) *situé sur la surface* σ, *on a*

$$\int \left(\frac{du}{dz} \cos m - \frac{du}{dy} \cos n \right) d\sigma = \int u \frac{dx}{ds} ds,$$

l, m, n étant les angles de la normale positive avec les trois axes. La première intégrale est étendue à tous les éléments de la surface σ *et la seconde à tous les éléments ds du contour.*

En effet, en projetant l'élément $d\sigma$ sur le plan des xy et celui des xz, nous pouvons poser

$$\cos n \, d\sigma = dx \, dy, \qquad \cos m \, d\sigma = dx \, dz,$$

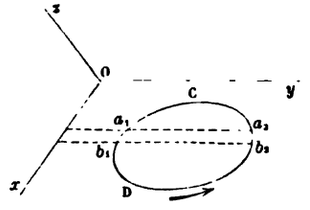
et, en désignant par A l'intégrale relative à σ, nous avons

$$(a) \qquad A = \int\int \frac{du}{dz}\,dx\,dz - \int\int \frac{du}{dy}\,dx\,dy.$$

Pour fixer les idées, supposons l'angle n aigu pour toute la surface σ, en sorte qu'on puisse regarder dx et dy comme positifs, comme on le fait ordinairement pour de pareilles intégrales.

Soit Ca_1Da_2 (*fig.* 8) la projection du contour S sur le plan des xy,

Fig. 8.



la flèche indiquant le sens du mouvement sur cette courbe. Désignons par u_1 et u_2 les valeurs de u aux points de S qui se projettent en a_1 et a_2, où une droite parallèle à l'axe des y rencontre la courbe projetée; nous aurons

$$\int \frac{du}{dy}\,dy = -u_1 + u_2.$$

Comme dx est regardé comme essentiellement positif dans la seconde intégrale (a), posons

$$dx = d\xi_1, \qquad dx = -d\xi_2,$$

$d\xi_1$ ou $d\xi_2$ étant la variation de x quand le point (x, y) s'avance sur la courbe d'une quantité infiniment petite dans le sens de la flèche; nous aurons donc

$$dx \int \frac{du}{dy}\,dy = -u_1\,d\xi_1 - u_2\,d\xi_2,$$

$$\int dx \int \frac{du}{dy}\,dy = -\int u\,d\xi = -\int u \frac{d\xi}{dL}\,dL,$$

en désignant par L la longueur de la projection de s sur le plan des x, y.

Nous pouvons mettre maintenant dx au lieu de $d\xi$, en admettant pour dx l'un ou l'autre signe, et nous aurons

$$\int dx \int \frac{du}{dy} dy = -\int u \frac{dx}{d\mathrm{L}} d\mathrm{L}.$$

On trouve de même

$$\int dx \int \frac{du}{dz} dz = \int u \frac{dx}{d\mathrm{L}_1} d\mathrm{L}_1,$$

en désignant par L_1 la longueur de la projection de s sur le plan des x, z. On a donc

$$\mathrm{A} = \int u \left(\frac{dx}{d\mathrm{L}} d\mathrm{L} + \frac{dx}{d\mathrm{L}_1} d\mathrm{L}_1 \right).$$

Or la coordonnée x du contour S peut être considérée comme une fonction de s et aussi comme une fonction de L et L_1 ; on a donc

$$\frac{dx}{ds} ds = \frac{dx}{d\mathrm{L}} d\mathrm{L} + \frac{dx}{d\mathrm{L}_1} d\mathrm{L}_1,$$

et il en résulte

$$\mathrm{A} = \int u \frac{dx}{ds} ds.$$

Si nous désignons par v et w deux fonctions semblables à u et que nous posions

$$\mathrm{B} = \int \left(\frac{dv}{dx} \cos n - \frac{dv}{dz} \cos l \right) d\sigma,$$

$$\mathrm{C} = \int \left(\frac{dw}{dy} \cos l - \frac{dw}{dx} \cos m \right) d\sigma,$$

nous obtiendrons de même

$$\mathrm{B} = \int v \frac{dy}{ds} ds, \qquad \mathrm{C} = \int w \frac{dz}{ds} ds.$$

THÉORÈME II. — *Soient les expressions*

$$\mathrm{X} = \frac{dw}{dy} - \frac{dv}{dz}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{du}{dz} - \frac{dw}{dx}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{dv}{dx} - \frac{du}{dy},$$

qui satisfont à la condition

$$\frac{d\mathrm{X}}{dx} + \frac{d\mathrm{Y}}{dy} + \frac{d\mathrm{Z}}{dz} = 0,$$

on aura

$$\int (\mathrm{X}\cos l + \mathrm{Y}\cos m + \mathrm{Z}\cos n)\, d\sigma = \int \left(u\frac{dx}{ds} + v\frac{dy}{ds} + w\frac{dz}{ds} \right) ds.$$

En effet, si nous remplaçons dans l'intégrale du premier membre les quantités X, Y, Z par leurs expressions, nous trouvons qu'elle est égale à la somme des trois intégrales A, B, C, et, en remplaçant A, B, C par les intégrales prises suivant le contour de σ et trouvées ci-dessus, nous obtenons cette formule.

Potentiel d'une double couche magnétique sur une autre.

21. D'après ce qui a été dit au n° 18, le potentiel d'une double couche magnétique Γ de puissance constante φ sur un système magnétique quelconque a pour expression

$$\mathrm{W} = \varphi \int \left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\cos\lambda + \frac{d\mathrm{P}}{dy}\cos\mu + \frac{d\mathrm{P}}{dz}\cos\nu \right) d\sigma;$$

x, y, z sont les coordonnées de $d\sigma$, élément de surface de la double couche; λ, μ, ν sont les angles de la normale positive à $d\sigma$ avec les axes de coordonnées et P est le potentiel du système magnétique au point (x, y, z).

Réduisons d'abord le système magnétique à un aimant infiniment petit; désignons par M son moment, par τ son volume et par l, m, n les angles directeurs de son axe magnétique; nous aurons pour son potentiel

$$p = \mathrm{M}\tau \left(\frac{dr^{-1}}{dx}\cos l + \frac{dr^{-1}}{dy}\cos m + \frac{dr^{-1}}{dz}\cos n \right),$$

en désignant par (x', y', z') les coordonnées du centre de cet aimant et par r la distance de ce point au point (x, y, z), où l'on prend le

potentiel p. On peut aussi écrire pour cette expression

$$p = -\mathrm{M}\tau\left(\frac{dr^{-1}}{dx}\cos l + \frac{dr^{-1}}{dy}\cos m + \frac{dr^{-1}}{dz}\cos n\right),$$

et il en résulte

$$\frac{dp}{dz} = -\mathrm{M}\tau\left(\frac{d^2r^{-1}}{dx\,dz}\cos l + \frac{d^2r^{-1}}{dy\,dz}\cos m + \frac{d^2r^{-1}}{dz^2}\cos n\right).$$

Remplaçons $\frac{d^2r^{-1}}{dz^2}$ par sa valeur

$$\frac{d^2r^{-1}}{dz^2} = -\frac{d^2r^{-1}}{dx^2} - \frac{d^2r^{-1}}{dy^2}$$

et nous obtenons

$$\frac{dp}{dz} = -\mathrm{M}\tau\frac{d}{dx}\left(\frac{dr^{-1}}{dz}\cos l - \frac{dr^{-1}}{dx}\cos n\right) + \mathrm{M}\tau\frac{d}{dy}\left(\frac{dr^{-1}}{dy}\cos n - \frac{dr^{-1}}{dz}\cos m\right).$$

Prenons maintenant pour l'aimant infiniment petit un élément d'une couche magnétique Γ' de puissance φ' et désignons par $d\sigma'$ la superficie de cet élément; nous devrons remplacer $\mathrm{M}\tau$ par $\varphi' d\sigma'$, et, pour avoir la valeur de $\frac{d\mathrm{P}}{dz}$, relative à l'action de la couche Γ', il faudra intégrer l'expression précédente sur toute la surface σ'; nous aurons ainsi

$$\frac{d\mathrm{P}}{dz} = +\varphi'\frac{d}{dx}\int\left(\frac{dr^{-1}}{dz'}\cos l - \frac{dr^{-1}}{dx'}\cos n\right)d\sigma' - \varphi'\frac{d}{dy}\int\left(\frac{dr^{-1}}{dy'}\cos n - \frac{dr^{-1}}{dz'}\cos m\right)d\sigma',$$

en remplaçant sous le signe d'intégration les différentiations par rapport à x, y, z par d'autres par rapport à x', y', z', coordonnées de $d\sigma'$ Posons

$$\mathrm{F} = \int\left(\frac{dr^{-1}}{dz'}\cos m - \frac{dr^{-1}}{dy'}\cos n\right)d\sigma',$$

$$\mathrm{G} = \int\left(\frac{dr^{-1}}{dx'}\cos n - \frac{dr^{-1}}{dz'}\cos l\right)d\sigma',$$

$$\mathrm{H} = \int\left(\frac{dr^{-1}}{dy'}\cos l - \frac{dr^{-1}}{dx'}\cos m\right)d\sigma'$$

et nous aurons

$$(a)\qquad \begin{cases} -\dfrac{dP}{dz} = \varphi'\left(\dfrac{dG}{dx} - \dfrac{dF}{dy}\right), \\ -\dfrac{dP}{dx} = \varphi'\left(\dfrac{dH}{dy} - \dfrac{dG}{dz}\right), \\ -\dfrac{dP}{dy} = \varphi'\left(\dfrac{dF}{dz} - \dfrac{dH}{dx}\right). \end{cases}$$

Ainsi l'expression de W, potentiel de la double couche Γ sur la double couche Γ', devient

$$W = -\varphi\varphi'\int\left[\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right)\cos\lambda + \left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right)\cos\mu + \left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right)\cos\nu\right] d\tau$$

et, d'après le théorème II démontré ci-dessus (n° 20),

$$W = -\varphi\varphi'\int\left(F\frac{dx}{ds} + G\frac{dy}{ds} + H\frac{dz}{ds}\right) ds.$$

D'après le théorème I, nous pouvons aussi remplacer F, G, H par des intégrales relatives au contour entier de Γ', et nous aurons

$$F = \int \frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'}ds', \qquad G = \int \frac{1}{r}\frac{dy'}{ds'}ds', \qquad H = \int \frac{1}{r}\frac{dz'}{ds'}ds'.$$

Portons ces valeurs dans la dernière expression de W, et nous obtenons

$$W = -\varphi\varphi'\int\int \frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right) ds\, ds'.$$

Enfin, si nous désignons par ε l'angle de ds et ds', nous obtenons

$$W = -\varphi\varphi'\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r} ds\, ds'$$

pour le potentiel de la couche magnétique Γ sur la couche magnétique Γ'.

Potentiel d'un courant fermé sur un autre.

22. L'action d'un courant fermé d'intensité φ, en tout point extérieur, est égale à celle d'une couche magnétique de puissance φ et dont le

bord coïncide avec la ligne s du courant. La même chose ayant lieu pour un second courant, il en résulte que l'action réciproque de deux courants linéaires fermés, maintenus constants et dont les intensités sont φ et φ', est la même que l'action réciproque de deux couches magnétiques de puissance φ et φ', et dont les bords coïncident avec les deux lignes de courant.

Ainsi, en désignant par I et I' les intensités des deux courants et posant

$$(b) \qquad W = -II' \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

$-dW$ sera le travail élémentaire produit dans un déplacement relatif des deux courants, qui provient de leur action mutuelle.

Franz Neumann a désigné cette quantité W sous le nom de *potentiel mutuel* des deux courants linéaires. Il avait déduit la formule (b) de la connaissance de la loi d'Ampère, dont nous allons bientôt parler.

Remarquons de plus que, d'après les formules (a) du numéro précédent, les composantes de la *force magnétique* du courant s' au point (x, y, z) suivant les axes des x, y, z sont

$$I'\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right), \quad I'\left(\frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}\right), \quad I'\left(\frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}\right);$$

en d'autres termes, ce sont les composantes de la force exercée par le courant s' sur l'unité positive de fluide magnétique placée au point (x, y, z).

23. Concevons, par exemple, que le circuit s' soit fixe et que le circuit s soit rigide et se meuve sous l'influence du circuit s'.

Soit M un point lié au circuit s et dont les coordonnées sont a, b, c. Menons par le point M trois droites parallèles aux axes de coordonnées. Tout déplacement infiniment petit du circuit s peut être considéré comme résultant du déplacement du point M et d'une rotation autour de ce point; da, db, dc étant les composantes du déplacement du point M et $d\varphi$, $d\chi$, $d\psi$ étant les composantes de la rotation des axes que nous avons menés par M, nous avons

$$-dW = -\frac{dW}{da}da - \frac{dW}{db}db - \frac{dW}{dc}dc - \frac{dW}{d\varphi}d\varphi - \frac{dW}{d\chi}d\chi - \frac{dW}{d\psi}d\psi;$$

$-\frac{dW}{da}$, $-\frac{dW}{db}$, $-\frac{dW}{dc}$ sont les composantes de la force qui tend à faire mouvoir le point M et $-\frac{dW}{d\varphi}$, $-\frac{dW}{d\chi}$, $-\frac{dW}{d\psi}$ sont les composantes de l'axe du couple qui tend à faire tourner le circuit s autour de ce point.

Les coordonnées des points du circuit s peuvent être désignées par

$$x = a + \xi, \qquad y = b + \eta, \qquad z = c + \zeta,$$

et l'on aura

$$\cos\varepsilon = \frac{d\xi}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d\eta}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{d\zeta}{ds}\frac{dz'}{ds'};$$

il en résulte

$$W = -II'\int\int \frac{d\xi\,dx' + d\eta\,dy' + d\zeta\,dz'}{[(a+\xi-x')^2 + (b+\eta-y')^2 + (c+\zeta-z')^2]^{\frac{1}{2}}};$$

puis nous en concluons

$$-\frac{dW}{da} = -II'\int\int \frac{(a+\xi-x')(d\xi\,dx' + d\eta\,dy' + d\zeta\,dz')}{[(a+\xi-x')^2 + (b+\eta-y')^2 + (c+\zeta-z')^2]^{\frac{3}{2}}};$$

on obtient de même les deux autres composantes de la force.

Pour former $\frac{dW}{d\varphi}$, imaginons une rotation infiniment petite du circuit s autour de la droite MX menée par le point M parallèlement à l'axe des x. En désignant par R la distance du point (x, y, z) à la droite MX, nous pouvons poser

$$y - b = R\cos\varphi, \qquad z - c = R\sin\varphi,$$

où R est constant et l'angle φ variable, et nous avons

$$\frac{dx}{d\varphi} = 0, \qquad \frac{dy}{d\varphi} = -R\sin\varphi = -(z-c), \qquad \frac{dz}{d\varphi} = R\cos\varphi = y - b;$$

puis nous obtenons

$$\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{1}{r^3}\left[(x-x')\frac{dx}{d\varphi} + (y-y')\frac{dy}{d\varphi} + (z-z')\frac{dz}{d\varphi}\right]$$
$$= \frac{1}{r^3}[(y-y')(z-c) - (z-z')(y-b)]$$

et

$$\frac{d\cos\varepsilon}{d\varphi}ds' = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dx}{ds}dx' + \frac{dy}{ds}dy' + \frac{dz}{ds}dz'\right)$$
$$= \frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{d\varphi}\right)dx' + \frac{d}{ds}\left(\frac{dy}{d\varphi}\right)dy' + \frac{d}{ds}\left(\frac{dz}{d\varphi}\right)dz'$$
$$= -\frac{dz}{ds}dy' + \frac{dy}{ds}dz'.$$

D'après ces expressions, on conclut, pour le moment des forces autour de la droite MX ou pour l'axe du couple composant suivant MX,

$$-\frac{d\mathrm{W}}{d\gamma} = \mathrm{II}'\int\int\left[\frac{-dz\,dy' + dy\,dz'}{r} + \frac{(y-y')(z-c)-(z-z')(y-b)}{r^3}\cos\varepsilon\,ds\,ds'\right].$$

On en conclut, par analogie, les moments autour de deux autres droites menées par M parallèlement aux axes des y et z.

Action mutuelle de deux éléments de courant.

24. Après avoir obtenu l'action mutuelle entre deux courants linéaires fermés, nous pouvons nous proposer de déterminer l'action mutuelle entre deux éléments de courant, en admettant que cette action a lieu suivant la droite qui les joint.

Désignons par $\psi\,ds\,ds'$ la force que les éléments de courant, situés sur ds et ds', exercent l'un sur l'autre, en prenant cette force positive, quand elle tend à faire décroître la droite r qui joint les milieux de ds et ds'. Soit δr l'accroissement de r provenant d'un déplacement virtuel du système des deux courants; il en résultera, par l'action mutuelle de ds et ds', le travail

$$-\psi\,\delta r\,ds\,ds',$$

et le travail produit par l'action mutuelle des deux circuits s'obtiendra en intégrant cette expression le long des contours s et s' des deux courants; ce travail est aussi égal à la variation $-\delta\mathrm{W}$, éprouvée par $-\mathrm{W}$ (n° 22), et nous obtenons

$$-\delta\mathrm{W} = -\int\int\psi\,\delta r\,ds\,ds'. \qquad (1)$$

Calculons ensuite la variation de

$$W = -\Pi'\int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds'.$$

En désignant par (x, y, z) et (x', y', z') les centres de ds et ds', nous avons

$$r^2 = (x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2,$$

$$\frac{1}{2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} = -\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} - \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} - \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'} = -\cos\varepsilon,$$

et il en résulte

$$W = \frac{1}{2}\Pi'\int\int \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\,\frac{ds\,ds'}{r}.$$

En prenant la variation de cette expression, on a

$$\delta W = \frac{1}{2}\Pi'\int\int\left[-\frac{1}{r^2}\delta r\,\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + \frac{1}{r}\,\frac{d^2\,\delta(r^2)}{ds\,ds'}\right]ds\,ds'.$$

Transformons la seconde partie de cette formule. En intégrant sur toute la ligne fermée s', on a

$$\int \frac{1}{r}\,\frac{d^2\,\delta r^2}{ds\,ds'}\,ds' = -\int \frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\,\frac{d\,\delta r^2}{ds}\,ds';$$

multiplions cette équation par ds et intégrons le long de s : nous aurons

$$\int\int \frac{1}{r}\,\frac{d^2\,\delta r^2}{ds\,ds'}\,ds\,ds' = -\int\int \frac{d\frac{1}{r}}{ds'}\,\frac{d\,\delta r^2}{ds}\,ds\,ds' = \int\int \frac{d^2\frac{1}{r}}{ds\,ds'}\,2r\,\delta r\,ds\,ds'.$$

Remplaçant dans δW, nous obtenons

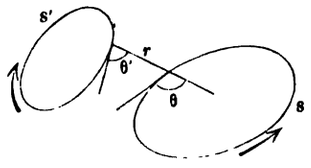
$$(2)\qquad -\delta W = -\tfrac{1}{2}\Pi'\int\int\left[-\frac{1}{r^2}\,\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + 2r\,\frac{d^2 r^{-1}}{ds\,ds'}\right]\delta r\,ds\,ds'.$$

Nous avons ensuite

$$(3)\qquad \begin{cases} -\dfrac{1}{r^2}\,\dfrac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + 2r\,\dfrac{d^2 r^{-1}}{ds\,ds'} \\ \quad = \dfrac{2}{r^2}\left(\dfrac{dr}{ds}\,\dfrac{dr}{ds'} - 2r\,\dfrac{d^2 r}{ds\,ds'}\right) = \dfrac{2}{r^2}\left[3\,\dfrac{dr}{ds}\,\dfrac{dr}{ds'} - \dfrac{d^2(r^2)}{ds\,ds'}\right]. \end{cases}$$

Regardons la direction de la droite r (*fig.* 9) comme allant de ds' vers ds et désignons par θ et θ' les angles de la droite r avec les tan-

Fig. 9.



gentes à s et s' menées dans le sens de l'accroissement des arcs s et s'. Nous en concluons les deux premières de ces trois équations

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{dr}{ds'} = -\cos\theta', \qquad \frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} = -2\cos\varepsilon,$$

la dernière ayant été obtenue ci-dessus. Nous avons donc

$$(4) \qquad -\frac{1}{r^2}\frac{d^2(r^2)}{ds\,ds'} + 2r\frac{d^2 r^{-1}}{ds\,ds'} = \frac{2}{r^2}(-3\cos\theta\cos\theta' + 2\cos\varepsilon).$$

Les expressions (1) et (2) devant être égales, quel que soit δr, les éléments des deux intégrales doubles doivent être eux-mêmes égaux, et l'on en conclut, en se servant des égalités (3) et (4),

$$(5) \qquad \psi\,ds\,ds' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{d^2 r}{ds\,ds'}\right)\Pi'\,ds\,ds'$$

ou

$$(6) \qquad \psi\,ds\,ds' = \frac{\Pi'\,ds\,ds'}{r^2}(2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta').$$

Cette dernière équation représente la formule trouvée par Ampère pour l'action entre deux éléments de courants $I\,ds$ et $I'\,ds'$. Il l'a obtenue, en 1822, comme résultat de ses expériences combinées avec le calcul; les travaux d'Ampère en Électrodynamique renferment les premières recherches théoriques faites sur ce sujet.

La formule (5) peut se mettre sous cette forme extrêmement simple

$$\psi\,ds\,ds' = -\frac{4}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}\Pi'\,ds\,ds',$$

qui a été aussi remarquée par Ampère.

25. Si deux éléments de courants sont parallèles et de même sens et de plus perpendiculaires à la droite qui les joint, on fera dans la formule (6) $\varepsilon = 0$, $\cos\theta = \cos\theta' = 0$, et l'action entre les deux éléments sera

$$-2\frac{I\,ds\,.\,I'\,ds'}{r^2}.$$

Ainsi, d'après le choix que nous avons fait pour la valeur du coefficient β dans le n° 14, nous arrivons à la définition suivante de l'unité de l'intensité de courant linéaire : Si deux éléments de courants de longueur 1, de même intensité, parallèles et de même sens, sont séparés par la distance 1 et perpendiculaires à la droite qui les joint, l'intensité de ces courants sera égale à 1, quand l'action attractive entre ces deux courants sera égale à 2.

Ampère divisait par 2 le second membre de la formule (6); donc, dans la définition précédente, la force entre les deux courants serait égale à 1 au lieu de 2. Ainsi l'intensité de courant adoptée pour unité par Ampère est plus petite que la précédente dans le rapport $1:\sqrt{2}$.

26. Nous avons admis que l'action entre deux éléments de courants a lieu suivant la droite qui les joint. Faisons cependant une remarque sur la loi d'action la plus générale qu'on puisse concevoir entre ces deux éléments.

Supposons le circuit s' fixe et le circuit s seul mobile, et soient en général δx, δy, δz les projections du déplacement infiniment petit du point (x, y, z) milieu de ds. Désignons par $X\,ds\,ds'$, $Y\,ds\,ds'$, $Z\,ds\,ds'$ les composantes de la force exercée par ds' sur ds; il est évident que les coordonnées x, y, z et x', y', z' des milieux de ds et ds' n'entreront dans X, Y, Z que par leurs différences $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$; car X, Y, Z ne changent pas si les axes de coordonnées sont transportés parallèlement à eux-mêmes.

Le travail élémentaire produit dans le déplacement du circuit s est

$$(b) \qquad \int\int (X\,\delta x + Y\,\delta y + Z\,\delta z)\,ds\,ds'.$$

Or, en désignant par ψ la force trouvée par Ampère, ce travail est

aussi égal à

$$(c) \qquad -\int\int \psi\, \delta r\, ds\, ds',$$

et δr a pour valeur

$$\frac{1}{r}[(x-x')\,\delta x + (y-y')\,\delta y + (z-z')\,\delta z].$$

Supposons ensuite que δx, δy, δz restent constants tout le long du circuit s, en sorte qu'il ne subisse qu'un mouvement de translation. Alors, en désignant par U, V, W des fonctions de x, y, z, on aura

$$\int\int \left(\frac{d\mathrm{U}}{ds}\,\delta x + \frac{d\mathrm{V}}{ds}\,\delta y + \frac{d\mathrm{W}}{ds}\,\delta z\right) ds\, ds' = 0;$$

puisque, en effectuant d'abord l'intégration le long du contour fermé s, on aura un résultat nul. Ainsi l'expression (c) peut s'écrire

$$(d) \qquad \begin{cases} -\int\int \frac{\psi}{r}\,[(x-x')\,\delta x + (y-y')\,\delta y + (z-z')\,\delta z]\, ds\, ds' \\ \qquad\qquad + \int\int \left(\frac{d\mathrm{U}}{ds}\,\delta x + \frac{d\mathrm{V}}{ds}\,\delta y + \frac{d\mathrm{W}}{ds}\,\delta z\right) ds\, ds'. \end{cases}$$

Maintenant, il est évident qu'on obtiendra l'égalité des formules (b) et (d) en égalant les coefficients de δx, δy, δz pris de part et d'autre, ce qui donne les trois équations

$$(e) \qquad \begin{cases} \mathrm{X}\, ds = -\psi\, ds\, \dfrac{x-x'}{r} + d\mathrm{U}, \\ \mathrm{Y}\, ds = -\psi\, ds\, \dfrac{y-y'}{r} + d\mathrm{V}, \\ \mathrm{Z}\, ds = -\psi\, ds\, \dfrac{z-z'}{r} + d\mathrm{W}; \end{cases}$$

U, V, W sont des fonctions de $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$. Comme $\mathrm{X}\,\delta x + \mathrm{Y}\,\delta y + \mathrm{Z}\,\delta z$ doit rester invariable par un changement des axes de coordonnées, il résulte des formules (e) que l'expression

$$d\mathrm{U}\,\delta x + d\mathrm{V}\,\delta y + d\mathrm{W}\,\delta z$$

est aussi invariable par ce changement. Ainsi U sera symétrique par rapport à $y - y'$ et $z - z'$, et l'on déduira V et W de U, en faisant sur les lettres x, y, z la permutation circulaire (x, y, z).

En ajoutant aux composantes de la force d'Ampère $\psi\, ds\, ds'$ respectivement les expressions $d\mathrm{U}\, ds'$, $d\mathrm{V}\, ds'$, $d\mathrm{W}\, ds'$, on aura les composantes d'une autre action élémentaire de ds' sur ds, d'après laquelle deux courants fermés resteront soumis à l'action mutuelle trouvée précédemment.

On pourra prendre pour U une infinité d'expressions et à chacune correspondra une action particulière.

Seconde expression du potentiel mutuel de deux courants fermés.

27. Nous avons trouvé (n° 24), pour le potentiel de deux courants l'un sur l'autre,

$$\mathrm{W} = \tfrac{1}{2}\,\mathrm{II}' \int\int \frac{d^2(r^2)}{ds\, ds'}\,\frac{ds\, ds'}{r}$$

ou

$$\mathrm{W} = \mathrm{II}' \int\int \frac{d}{ds'}\left(r\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds\, ds'}{r}.$$

Or, en intégrant par parties tout le long de la ligne fermée s', on a

$$\int \frac{d}{ds'}\left(r\frac{dr}{ds}\right)\frac{ds'}{r} = \int \frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}\,\frac{ds'}{r},$$

et, en substituant dans W, on obtient

$$\mathrm{W} = \mathrm{II}' \int\int \frac{dr}{ds}\,\frac{dr}{ds'}\,\frac{ds\, ds'}{r}.$$

Ensuite, on a (n° 24)

$$\frac{dr}{ds} = \cos\theta, \qquad \frac{dr}{ds'} = -\cos\theta',$$

et il en résulte

$$\mathrm{W} = -\,\mathrm{II}' \int\int \frac{\cos\theta\,\cos\theta'}{r}\, ds\, ds'.$$

Action d'un courant fermé sur un élément de courant.

28. Ayant trouvé l'action d'un élément de courant sur un élément de courant, on peut, par une intégration, trouver les composantes de l'action d'un courant sur un élément de courant. Nous avons obtenu, pour la force exercée par l'élément de courant $I'\,ds'$ sur l'élément $I\,ds$,

$$\psi\,ds\,ds' = \frac{1}{r^2}\left(\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - 2r\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right) II'\,ds\,ds',$$

et cette force a été prise positive, quand elle tend à diminuer r. Ainsi (x, y, z) et (x', y', z') étant les points milieux de ds et ds', nous avons, pour la composante suivant l'axe des x de la force exercée par ds' sur ds,

$$F_x = -\psi\frac{x-x'}{r}$$

ou

$$F_x = II'\,ds\,ds'\left(2\frac{x-x'}{r^2}\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right):$$

par suite, nous aurons pour la composante suivant l'axe des x de l'action du courant fermé s' sur l'élément ds de courant

$$X = II'\,ds\int\left(2\frac{x-x'}{r^2}\frac{d^2r}{ds\,ds'} - \frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\right)ds',$$

l'intégrale étant prise sur tout le circuit s'. En intégrant par parties, on obtient

$$\int\frac{x-x'}{r^2}\frac{d^2r}{ds\,ds'}\,ds' = -\int\frac{dr}{ds}\frac{d}{ds'}\left(\frac{x-x'}{r^2}\right)ds',$$

$$-\int\frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds' = +\int\frac{d}{ds'}\left(\frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\right)r\,ds'.$$

On en conclut

$$\begin{aligned} X &= II'\,ds\int\left[-2\frac{dr}{ds}\frac{d}{ds'}\frac{x-x'}{r^2} + r\frac{d}{ds'}\left(\frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\right)\right]ds' \\ &= II'\,ds\int\left[\frac{1}{r^2}\frac{dx'}{ds'}\frac{dr}{ds} + \frac{x-x'}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + \frac{x-x'}{r^2}\frac{d^2r}{ds\,ds'}\right]ds' \\ &= II'\,ds\int\frac{(x-x')^2}{r^3}\frac{d}{ds'}\left(\frac{r}{x-x'}\frac{dr}{ds}\right)ds'. \end{aligned}$$

On a ensuite

$$r\frac{dr}{ds} = (x - x')\frac{dx}{ds} + (y - y')\frac{dy}{ds} + (z - z')\frac{dz}{ds};$$

divisons par $x - x'$ et différentions par rapport à s' : nous obtiendrons

$$\frac{d}{ds'}\left(\frac{r}{x - x'}\frac{dr}{ds}\right) = + \frac{1}{(x - x')^2}\left[(y - y')\frac{dx'}{ds'} - (x - x')\frac{dy'}{ds'}\right]\frac{dy}{ds} + \frac{1}{(x - x')^2}\left[(z - z')\frac{dx'}{ds'} - (x - x')\frac{dz'}{ds'}\right]\frac{dz}{ds},$$

et, en substituant cette quantité dans l'expression de X, nous trouvons la formule

$$X = + \Pi' dy \int \frac{1}{r^3}\left[(y - y')\frac{dx'}{ds'} - (x - x')\frac{dy'}{ds'}\right] ds' - \Pi' dz \int \frac{1}{r^3}\left[(x - x')\frac{dz'}{ds'} - (z - z')\frac{dx'}{ds'}\right] ds'.$$

Les composantes Y, Z de la même force s'obtiendront par une permutation circulaire sur les lettres x, y, z.

29. Désignons par θ' l'angle de ds' et de la droite r qui joint ds' à ds; puis projetons sur les plans de coordonnées le triangle construit sur r et ds'. Menons une normale N au plan de ce triangle, en choisissant sa direction de manière que N, ds' et r se présentent dans le même ordre que les axes des z, des x et des y. Alors, si nous appelons λ, μ, ν les cosinus directeurs de N, nous aurons pour les projections du triangle

$$\lambda r\, ds' \sin\theta' = (z - z')\, dy' - (y - y')\, dz',$$
$$\mu r\, ds' \sin\theta' = (x - x')\, dz' - (z - z')\, dx',$$
$$\nu r\, ds' \sin\theta' = (y - y')\, dx' - (x - x')\, dy'.$$

D'après cela, les expressions de X, Y, Z deviennent

$$X = \Pi' \int \frac{\nu\, dy - \mu\, dz}{r^2} \sin\theta'\, ds',$$
$$Y = \Pi' \int \frac{\lambda\, dz - \nu\, dx}{r^2} \sin\theta'\, ds',$$
$$Z = \Pi' \int \frac{\mu\, dx - \lambda\, dy}{r^2} \sin\theta'\, ds'.$$

Désignons ensuite par A, B, C les quantités suivantes :

$$A = \int \frac{\lambda \sin\theta'}{r^2}\, ds' = \int \frac{1}{r^3}\left[(z-z')\frac{dy'}{ds'} - (y-y')\frac{dz'}{ds'}\right] ds',$$

$$B = \int \frac{\mu \sin\theta'}{r^2}\, ds' = \int \frac{1}{r^3}\left[(x-x')\frac{dz'}{ds'} - (z-z')\frac{dx'}{ds'}\right] ds',$$

$$C = \int \frac{\nu \sin\theta'}{r^2}\, ds' = \int \frac{1}{r^3}\left[(y-y')\frac{dx'}{ds'} - (x-x')\frac{dy'}{ds'}\right] ds';$$

ces quantités peuvent se mettre encore sous une autre forme. En effet, si l'on pose, comme au n° 21,

$$F = \int \frac{1}{r}\frac{dx'}{ds'}\, ds', \qquad G = \int \frac{1}{r}\frac{dy'}{ds'}\, ds', \qquad H = \int \frac{1}{r}\frac{dz'}{ds'}\, ds',$$

on a aussi

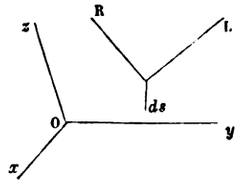
$$(a) \qquad A = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \qquad B = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \qquad C = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy}.$$

Nous avons ensuite pour les composantes X, Y, Z

$$X = II'(C\,dy - B\,dz), \qquad Y = II'(A\,dz - C\,dx), \qquad Z = II'(B\,dx - A\,dy).$$

Désignons par L (*fig.* 10) la droite qui passe par le point (x, y, z)

Fig. 10.



et qui se projette suivant A, B, C sur les axes des coordonnées. Il résulte des expressions de X, Y, Z que la force R que le courant fermé s' exerce sur l'élément ds est perpendiculaire à la droite L et à l'élément ds. De plus, la direction de la force R est telle que R, ds et L se présentent dans le même ordre que Oz, Ox et Oy.

Le plan passant par L et ds a été appelé par Ampère *plan directeur* et

la droite L, qui ne dépend pas de la direction de *ds*, la *directrice* de l'action du courant *s'* au point (x, y, z). D'ailleurs, en multipliant A, B, C par I', on obtient les composantes de la force magnétique du courant *s'* au point (x, y, z) (n° 22).

En ajoutant les carrés de X, Y, Z, on obtient

$$R^2 = I^2 I'^2 [L^2 ds^2 - (A\,dx + B\,dy + C\,dz)^2]$$

ou

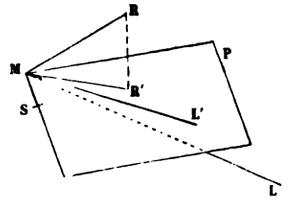
$$R = II' L\,ds \sin(L, ds).$$

30. De cette formule on peut déduire le théorème suivant :

La composante de la force, qu'un courant fermé exerce sur un élément de courant ds situé dans un plan P, *prise suivant ce plan* P, *est indépendante de la direction de ds dans le plan.*

Soient MS (*fig.* 11) la position de l'élément *ds* et R' la projection de

Fig. 11.



la force R sur le plan P; R est perpendiculaire à MS et à la directrice L, par suite perpendiculaire sur le plan SML. Désignons par α et β les angles du plan P avec RMS et SML; nous aurons

$$\alpha + \beta = \frac{\pi}{2},$$

$$R' = R\cos\alpha = R\sin\beta,$$

et, en mettant pour R sa valeur,

$$R' = II' L\,ds \sin(L, ds) \sin\beta.$$

Désignons par υ l'angle que L fait avec sa projection L' sur le plan P;

l'angle trièdre MSLL′ donne

$$\sin\upsilon = \sin(\mathrm{L}, ds)\sin\beta,$$

et il en résulte

$$\mathrm{R}' = \mathrm{II}'\mathrm{L}\, ds \sin\upsilon.$$

Directrice d'un courant fermé infiniment petit.

31. D'après ce que nous avons dit au n° 29, A, B, C sont les composantes de la force magnétique du circuit s', lorsqu'il est traversé par un courant égal à l'unité; on peut donc poser

$$\mathrm{A} = -\frac{d\mathrm{P}}{dx}, \qquad \mathrm{B} = -\frac{d\mathrm{P}}{dy}, \qquad \mathrm{C} = -\frac{d\mathrm{P}}{dz},$$

en désignant par P le potentiel d'une double couche magnétique terminée au circuit s' et de puissance égale à 1.

Supposons ensuite que le circuit s' soit infiniment petit et puisse être considéré comme plan; désignons par ω la surface plane comprise par s', par r sa distance au point (x, y, z) et par dn l'élément de normale à ω mené du côté positif; nous aurons (n° 14)

$$\mathrm{P} = \omega \frac{d}{dn}\frac{1}{r},$$

et, par suite,

$$\mathrm{A} = -\omega\frac{d^2}{dn\,dx}\frac{1}{r}, \qquad \mathrm{B} = -\omega\frac{d^2}{dn\,dy}\frac{1}{r}, \qquad \mathrm{C} = -\omega\frac{d^2}{dn\,dz}\frac{1}{r},$$

ou encore, en désignant par (x', y', z') un point de ω,

$$\mathrm{A} = \omega\frac{d}{dn}\frac{x-x'}{r^3}, \qquad \mathrm{B} = \omega\frac{d}{dn}\frac{y-y'}{r^3}, \qquad \mathrm{C} = \omega\frac{d}{dn}\frac{z-z'}{r^3}.$$

Solénoïdes.

32. On appelle *solénoïde* un système, considéré par Ampère, de courants infiniment petits, égaux entre eux, normaux à une même ligne droite ou courbe, qui les traverse et qui est appelée l'*axe du solé-*

noïde; ces courants se suivant à une distance constante infiniment petite, prise sur cet axe. On appelle *pôles du solénoïde* les deux points de l'axe situés sur les plans des deux courants extrêmes.

Dans la pratique, on réalise un solénoïde d'une manière très approchée, en enroulant un fil en hélice sur un cylindre ou une portion d'anneau de petit rayon, les tours du fil étant extrêmement voisins, et l'on fait revenir le fil parallèlement à l'axe, afin de détruire les effets de la projection du solénoïde sur l'axe.

Concevons que l'axe du solénoïde soit rectifié, et qu'un observateur soit placé suivant l'axe du solénoïde, de manière à voir les courants tourner de droite à gauche. L'effet de chacun de ces courants sera le même que celui d'une couche magnétique dont le côté supérieur sera positif; donc il est naturel d'appeler *pôle positif* le pôle qui est du côté de la tête de l'observateur et *pôle négatif* celui qui est dirigé vers ses pieds. On peut aussi les appeler *pôle nord* et *pôle sud* à cause de leur analogie avec les pôles d'un aimant.

Désignons par l la longueur de l'axe du solénoïde comprise entre le pôle sud et un point quelconque de cet axe. En remplaçant dn par dl dans les formules du numéro précédent, nous aurons pour les projections de la directrice du courant élémentaire dont le plan coupe l'axe au point (x', y', z')

$$\mathrm{A} = \omega \frac{d}{dl} \frac{x - x'}{r^3}, \qquad \mathrm{B} = \omega \frac{d}{dl} \frac{y - y'}{r^3}, \qquad \mathrm{C} = \omega \frac{d}{dl} \frac{z - z'}{r^3}.$$

Les courants étant considérés comme infiniment rapprochés, désignons par $h\,dl$ le nombre des courants qui se trouvent sur dl. Pour avoir les projections de la directrice relative à tout le solénoïde, il faudra multiplier les expressions précédentes par $h\,dl$ et les intégrer dans toute la longueur de l'axe, et nous aurons pour ces projections

$$\mathfrak{A} = h\omega \left(\frac{x - x_2}{r_2^3} - \frac{x - x_1}{r_1^3} \right),$$

$$\mathfrak{B} = h\omega \left(\frac{y - y_2}{r_2^3} - \frac{y - y_1}{r_1^3} \right),$$

$$\mathfrak{C} = h\omega \left(\frac{z - z_2}{r_2^3} - \frac{z - z_1}{r_1^3} \right),$$

en désignant respectivement par (x_2, y_2, z_2) et (x_1, y_1, z_1) les pôles positif et négatif P_2 et P_1.

33. D'après le n° 29, les composantes de l'action du solénoïde sur l'élément de courant ds, dont les projections sont dx, dy, dz, ont pour valeurs

$$X = \Pi'(\mathfrak{C}\,dy - \mathfrak{B}\,dz), \quad Y = \Pi'(\mathfrak{A}\,dz - \mathfrak{C}\,dx), \quad Z = \Pi'(\mathfrak{B}\,dx - \mathfrak{A}\,dy).$$

Or cette force peut être regardée comme la résultante de deux actions R_2 et R_1 dont les directrices L_2 et L_1 ont pour projections

$$\mathfrak{A}_2 = h\omega\frac{x - x_2}{r_2^3}, \quad \mathfrak{B}_2 = h\omega\frac{y - y_2}{r_2^3}, \quad \mathfrak{C}_2 = h\omega\frac{z - z_2}{r_2^3},$$

$$\mathfrak{A}_1 = -h\omega\frac{x - x_1}{r_1^3}, \quad \mathfrak{B}_1 = -h\omega\frac{y - y_1}{r_1^3}, \quad \mathfrak{C}_1 = -h\omega\frac{z - z_1}{r_1^3};$$

ces deux directrices ont donc les grandeurs suivantes

$$L_2 = \frac{h\omega}{r_2^2}, \qquad L_1 = \frac{h\omega}{r_1^2},$$

et elles sont dirigées suivant r_2 et r_1.

On obtient ensuite pour les valeurs de R_2 et R_1 (n° 29)

$$R_2 = \Pi' L_2\,ds\sin(L_2, ds) = \Pi' h\omega\frac{ds}{r_2^2}\sin(r_2, ds),$$

$$R_1 = \Pi' h\omega\frac{ds}{r_1^2}\sin(r_1, ds).$$

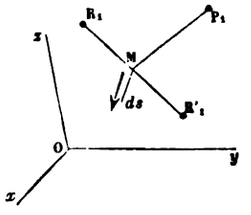
Ainsi, l'action du solénoïde sur l'élément de courant ds peut être remplacée par deux forces produites par ses pôles, et ces forces R_2 et R_1 sont perpendiculaires au plan mené par l'élément ds et par la droite r_2 ou r_1. Mais il faut encore définir la direction de ces forces.

La direction de L_1 se confond avec r_1, en allant de l'élément ds vers le pôle P_1 (*fig.* 12). Les directions de R_1, ds et L_1 doivent se présenter dans le même ordre que Oz, Ox, Oy (n° 29). Donc un observateur placé suivant ds et regardant P_1 a la force R_1 à sa gauche.

De même, un observateur placé suivant ds et regardant P_2 aura la force R_2 à sa droite.

Quant à l'action de l'élément *ds* de courant sur le solénoïde, elle est égale et de sens contraire à celle du solénoïde sur *ds*. Ainsi, cette action sera celle qui sera produite par R'_1 et R'_2 égales et contraires respectivement à R_1 et R_2. De plus, un observateur, étant placé suivant

Fig. 12.



ds, s'il regarde P_1, aura R'_1 à sa droite et, s'il regarde P_2, aura R'_2 à sa gauche.

Les deux forces R'_1 et R'_2 sont appliquées à un point M de *ds* supposé lié au solénoïde. On pourra les supposer appliquées respectivement aux pôles P_1 et P_2, en leur adjoignant deux couples situés dans les plans $P_1MR'_1$ et $P_2MR'_2$ et dont les moments seront R_1r_1 et R_2r_2.

Ces résultats ont été obtenus par Savary en 1823 (¹).

Action d'un courant fermé sur un solénoïde.

34. Au lieu de l'action d'un courant fermé sur un solénoïde, on peut chercher l'action égale et directement opposée du solénoïde sur ce courant. Or l'action du solénoïde peut être remplacée par l'action fictive de ces deux pôles. Il suffit donc de chercher l'action d'un pôle de solénoïde sur le courant.

Les composantes de l'action du pôle P_1, par exemple, sur un élément de courant *ds*, sont, d'après le numéro précédent,

$$X_1 = \Pi'(\mathfrak{S}_1\,dy - \mathfrak{V}_1\,dz), \qquad \ldots.$$

En remplaçant $\mathfrak{U}_1$, $\mathfrak{V}_1$, $\mathfrak{S}_1$ par leurs valeurs et intégrant sur tout le

(¹) Voir *Mémoires de la Société française de Physique*, t. II, p. 338.

circuit s, on a, pour les composantes de la force de translation,

$$(\alpha) \qquad \int X_1 = -\Pi' h\omega \int \left(\frac{z - z_1}{r_1^3}\, dy - \frac{y - y_1}{r_1^3}\, dz \right), \qquad \ldots.$$

Démontrons ensuite que la somme des moments des forces élémentaires, pris par rapport à toute droite passant par le pôle P_1, est nulle. Pour simplifier, mettons l'origine des coordonnées à ce pôle : nous aurons

$$X_1 = -\Pi' h\omega \frac{z\,dy - y\,dz}{r_1^3},$$

$$Y_1 = -\Pi' h\omega \frac{x\,dz - z\,dx}{r_1^3},$$

$$Z_1 = -\Pi' h\omega \frac{y\,dx - x\,dy}{r_1^3}.$$

Nous aurons donc, pour la somme des moments par rapport à l'axe des z,

$$\int (x Y_1 - y X_1) = -\Pi' h\omega \int \frac{x(x\,dz - z\,dx) - y(z\,dy - y\,dz)}{r^3},$$

et l'intégrale du second membre peut se transformer ainsi :

$$\int \frac{r^2\,dz - z(x\,dx + y\,dy + z\,dz)}{r^3} = \int \frac{r\,dz - z\,dr}{r^2} = \int d\left(\frac{z}{r}\right);$$

elle est donc nulle, puisqu'elle est prise le long d'un contour fermé. La somme des moments par rapport à l'axe des x ou des y est de même nulle.

Ainsi, l'action d'un pôle de solénoïde sur un courant fermé se réduit à une force unique passant par ce pôle. Donc, aussi réciproquement, l'action d'un courant fermé sur un solénoïde se réduit à deux forces appliquées aux pôles P_1 et P_2 de ce solénoïde. L'une de ces forces a pour composantes les expressions (α) prises en signe contraire et l'autre ces expressions avec le changement de l'indice 1 en 2.

Action d'un courant fermé infiniment petit sur un pareil courant.

35. Pour déterminer l'action mutuelle de deux courants fermés infiniment petits, substituons-y l'action mutuelle de deux couches magnétiques dont les bords sont situés sur les lignes des courants.

Si I et I′ sont les intensités des deux courants, ce sont aussi les puissances des deux couches magnétiques. Désignons par ω et ω' les aires renfermées par ces courants, par (x, y, z) et (x', y', z') les centres de ces aires et par dn et dn' les éléments de normale aux couches, menés du côté positif.

r étant la distance des deux centres, on a pour le potentiel du premier aimant au point (x', y', z') (n° 31)

$$\mathrm{P} = \mathrm{I}\,\omega \frac{dr^{-1}}{dn},$$

et le potentiel du second aimant sur le premier est (n° 18)

$$\mathrm{W} = \mathrm{I}'\omega' \frac{d\mathrm{P}}{dn'} = \mathrm{II}'\omega\omega' \frac{d^2 r^{-1}}{dn\,dn'}.$$

On a ensuite, pour les composantes de l'action du second aimant sur le premier,

$$-\frac{d\mathrm{W}}{dx} = \mathrm{II}'\omega\omega' \frac{d^2}{dn\,dn'} \frac{x - x'}{r^3},$$

$$-\frac{d\mathrm{W}}{dy} = \mathrm{II}'\omega\omega' \frac{d^2}{dn\,dn'} \frac{y - y'}{r^3},$$

$$-\frac{d\mathrm{W}}{dz} = \mathrm{II}'\omega\omega' \frac{d^2}{dn\,dn'} \frac{z - z'}{r^3}.$$

Action mutuelle de deux solénoïdes.

36. Désignons par l et l' les longueurs des arcs de solénoïdes, comptées à partir des pôles négatifs, et, en général, employons les mêmes lettres qu'au n° 32 pour le premier solénoïde et affectons ces lettres d'un accent pour les quantités correspondantes dans le second solénoïde.

La composante suivant l'axe des x de la force produite par les courants normaux à dl' sur les courants normaux à dl est, d'après le numéro précédent,

$$hh'\Pi'\omega\omega'\frac{d^2}{dl\,dl'}\frac{x-x'}{r^3}dl\,dl',$$

et la composante de la force produite par le second solénoïde sur le premier sera

$$X = hh'\Pi'\omega\omega'\int\int\frac{d^2}{dl\,dl'}\frac{x-x'}{r^3}dl\,dl',$$

les intégrales étant prises le long des axes des solénoïdes depuis le pôle négatif P_1 ou P'_1 jusqu'au pôle positif P_2 ou P'_2. Les deux intégrations se font immédiatement et, en désignant par $r_{i,j}$ la distance du pôle P_i au pôle P'_j, on a

$$X = hh'\Pi'\omega\omega'\left(\frac{x_2-x'_2}{r^3_{2,2}} - \frac{x_2-x'_1}{r^3_{2,1}} - \frac{x_1-x'_2}{r^3_{1,2}} + \frac{x_1-x'_1}{r^3_{1,1}}\right),$$

et l'on obtiendra les deux composantes de la même force suivant les axes des y ou des z, en changeant la lettre x en y ou z.

Donc, en ne s'occupant pas d'abord des couples, on peut remplacer cette force par les actions des pôles P'_1 et P'_2 sur les pôles P_1 et P_2, l'action étant répulsive pour des pôles de même nom et attractive pour des pôles de nom contraire; ces forces agissent en raison inverse du carré de la distance, et leur grandeur pour l'unité de distance est

$$hh'\Pi'\omega\omega'.$$

Tout solénoïde S peut être remplacé par deux solénoïdes infinis S_2 et S_1 qui ont un pôle à l'infini et qui ont pour autre pôle, l'un le pôle positif P_2, l'autre le pôle négatif P_1 de S. On peut de même remplacer un second solénoïde fini S′ par deux solénoïdes infinis S'_1 et S'_2. Donc, pour avoir l'action de S′ sur S, il suffit de prendre les actions de S_1 et S_2 sur S'_1 et S'_2. Or S'_1 pouvant être considéré comme un système de courants, l'action de S'_1 sur S_1, par exemple, se réduit, d'après le n° 34, à une force unique passant par le pôle P_1; de même cette force passe par P'_1. Il n'y a donc pas d'autres actions que celles qui ont été données ci-dessus entre les pôles.

Action d'un aimant sur un courant.

37. En général, dans les aimants, il n'existe pas véritablement deux pôles, c'est-à-dire deux points tels que l'action extérieure de l'aimant puisse être remplacée par l'action de ces deux points en lesquels on imagine concentrées des masses de magnétisme égales et de signe contraire.

Toutefois on a vu, dans la théorie du Magnétisme (*Théorie du Potentiel*, IIe Partie, Chap. IV), qu'on peut concevoir un corps allongé de section très petite, dans lequel le magnétisme soit distribué uniformément et dont l'action soit équivalente à celles de masses de fluide magnétique égales et de signe contraire, placées sur ces deux bases.

Ces aimants ont été appelés *solénoïdaux simples*, précisément à cause de leur complète analogie avec les solénoïdes d'Ampère, dont l'action, comme nous avons vu, peut être remplacée par celles de deux pôles situés à leurs extrémités. Ainsi, les lois trouvées ci-dessus pour les actions entre les solénoïdes et les courants peuvent être appliquées aux actions entre les aimants solénoïdaux simples et les courants.

Ces aimants solénoïdaux sont à peu près impossibles à réaliser dans la pratique; mais, si l'on emploie des cylindres longs et de petite section, aimantés avec soin à saturation, on peut admettre avec une grande approximation que l'action d'un tel aimant est équivalente aux actions de deux pôles situés vers les extrémités, et que cette action est encore la même que celle d'un solénoïde.

Supposons qu'on remplace deux de ces aimants par deux solénoïdes qui aient respectivement les mêmes pôles que ces aimants. L'action entre les pôles positifs, à l'unité de distance, aura pour grandeur

$$hh'\mathrm{II}'\omega\omega' ; \tag{1}$$

désignons par μ et μ' les masses magnétiques des pôles positifs des deux aimants; l'action entre ces deux pôles à la distance 1 est $\mu\mu'$ et, en égalant cette action à la précédente, nous obtenons

$$h\mathrm{I}\omega = \mu, \qquad h'\mathrm{I}'\omega' = \mu'. \tag{2}$$

38. L'action du pôle positif P d'un solénoïde, dont les éléments sont

h, I, ω, sur un élément ds de courant d'intensité j, a pour grandeur (n° 33)

$$\mathrm{R} = h\mathrm{I}\omega j \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds),$$

r étant la distance entre P et ds, et cette force est perpendiculaire au plan mené par r et ds. En remplaçant, d'après ce que nous venons de voir, $h\mathrm{I}\omega$ par μ, nous aurons, pour l'action du pôle positif d'aimant sur un élément de courant ds,

$$\mathrm{R} = \mu j \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds), \tag{3}$$

et la direction de la force reste la même.

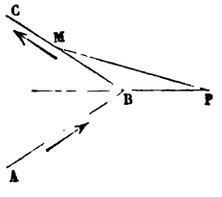
On peut remarquer maintenant que le choix qui a été fait (n°s 14 et 25) du coefficient de l'action électrodynamique simplifie un peu les formules précédentes. Si, comme Ampère, on avait divisé la formule de cette action par 2, l'expression (1) eût été multipliée par $\frac{1}{2}$ et l'on aurait eu, au lieu de (2),

$$h\mathrm{I}\omega = \mu\sqrt{2}.$$

39. Cherchons l'action d'un pôle positif P d'aimant sur un courant dont le circuit est formé de deux lignes droites AB, BC, qui font entre elles un angle 2α et supposons le pôle P sur le prolongement de la bissectrice de cet angle.

Désignons par b la distance de P (*fig.* 13) à la droite AB et par u

Fig. 13.



l'angle BMP. Comptons la ligne s à partir de B, et nous aurons

$$s = \mathrm{BM} = b\cot u - b\cot\alpha,$$

$$\mathrm{MP} = r = \frac{b}{\sin u}.$$

Donc, d'après la formule (3), on a, pour l'action du pôle P sur l'élément de courant *ds*,

$$R = -\frac{\mu j}{b}\sin u\,du.$$

Cette force est perpendiculaire au plan de l'angle et, d'après le n° 33, elle est dirigée en avant du plan de la figure. Donc toutes les actions élémentaires exercées par le pôle P sont parallèles et de même sens, et elles ont pour résultante

$$-\frac{2\mu j}{b}\int_{\alpha}^{0}\sin x\,dx = \frac{2\mu j}{b}(1-\cos\alpha);$$

en introduisant $BP = a$ au lieu de b, on a, pour la force qui sollicite le courant,

$$2\frac{\mu j}{a}\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}, \tag{4}$$

et cette force est perpendiculaire au plan de l'angle et dirigée en avant de ce plan. La force exercée par le courant sur le pôle P est égale et de sens contraire, et tend à faire mouvoir P en arrière du plan.

La formule (4) a été obtenue par Biot et Savart au moyen de l'expérience, et Laplace en avait conclu la formule (3) pour l'action entre un pôle d'aimant et un élément de courant.

CHAPITRE III.

INDUCTION PRODUITE DANS LES COURANTS LINÉAIRES.

Dans le Chapitre précédent, nous nous sommes occupés seulement des forces mécaniques qui agissent entre des circuits linéaires supposés traversés par des courants constants ou encore entre un tel circuit et des aimants. Ces forces tendent donc à faire mouvoir les aimants ou les conducteurs linéaires qui portent ces courants.

Mais, si l'on déplace effectivement, par rapport à un courant S, un aimant ou un autre courant S′, il se produira pendant ce déplacement une modification dans l'intensité du courant S ou, en d'autres termes, le circuit qui porte le courant S sera traversé par un autre courant. On peut aussi laisser fixes les courants S et S′, et, si l'on change l'intensité de S′, il en résultera encore pendant ce changement une modification dans l'intensité de S.

Ces phénomènes, qui ont été reconnus expérimentalement par Faraday, portent le nom de *phénomènes d'induction*. Nous allons les démontrer et les calculer dans ce Chapitre.

Potentiel d'aimants ou de courants sur un courant linéaire fermé.

1. Considérons un aimant H et un courant électrique fermé S d'intensité I. Construisons une surface σ terminée à la ligne du courant et prenons cette surface pour la surface moyenne d'une couche magnétique de puissance I. Nous avons vu que l'action de l'aimant H est la même sur le courant S que sur la couche magnétique et qu'ainsi le potentiel de H sur le courant S a pour expression (Chap. II, n° 18)

$$I\int \frac{dP}{dn}\,d\sigma$$

ou

$$(a) \qquad \mathrm{I}\int\left(\frac{d\mathrm{P}}{dx}\cos\lambda+\frac{d\mathrm{P}}{dy}\cos\mu+\frac{d\mathrm{P}}{dz}\cos\nu\right)d\sigma,$$

P étant le potentiel de l'aimant H au point (x, y, z) situé sur $d\sigma$, dn l'élément de la normale à $d\sigma$, menée du côté positif, et λ, μ, ν les angles de cette normale avec les axes de coordonnées.

D'autre part, dans le Chapitre II (n° 21), nous avons vu qu'on a, pour le potentiel d'un courant S′ sur un courant S, la formule

$$\mathrm{W}=-\mathrm{II}'\int(\mathrm{X}\cos\lambda+\mathrm{Y}\cos\mu+\mathrm{Z}\cos\nu)\,d\sigma,$$

l'intégrale étant étendue, comme ci-dessus, à la surface σ limitée à S, et l'on a

$$\mathrm{X}=\frac{d\mathrm{H}}{dy}-\frac{d\mathrm{G}}{dz},\qquad \mathrm{Y}=\frac{d\mathrm{F}}{dz}-\frac{d\mathrm{H}}{dx},\qquad \mathrm{Z}=\frac{d\mathrm{G}}{dx}-\frac{d\mathrm{F}}{dy},$$

où F, G, H sont des intégrales prises tout le long de S′ et sont fonctions de x, y, z, coordonnées d'un point situé sur S. La fonction W peut aussi s'écrire

$$\mathrm{W}=-\mathrm{II}'\int\left(\mathrm{F}\frac{dx}{ds}+\mathrm{G}\frac{dy}{ds}+\mathrm{H}\frac{dz}{ds}\right)ds.$$

Si nous avons un nombre quelconque de courants S′ définis par les quantités F, G, H, I′, posons

$$(b) \qquad \begin{aligned} &\Sigma\mathrm{I}'\mathrm{X}=\mathfrak{A}, \quad &&\Sigma\mathrm{I}'\mathrm{Y}=\mathfrak{B}, \quad &&\Sigma\mathrm{I}'\mathrm{Z}=\mathfrak{C},\\ &\Sigma\mathrm{I}'\mathrm{F}=\mathfrak{F}, \quad &&\Sigma\mathrm{I}'\mathrm{G}=\mathfrak{G}, \quad &&\Sigma\mathrm{I}'\mathrm{H}=\mathfrak{H}, \end{aligned}$$

le signe Σ servant à sommer des quantités semblables pour tous les circuits; $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ sont les composantes de la force magnétique totale exercée par les courants S′ (Chap. II, n° 22), et nous aurons

$$(c) \qquad \mathfrak{A}=\frac{d\mathfrak{H}}{dy}-\frac{d\mathfrak{G}}{dz},\qquad \mathfrak{B}=\frac{d\mathfrak{F}}{dz}-\frac{d\mathfrak{H}}{dx},\qquad \mathfrak{C}=\frac{d\mathfrak{G}}{dx}-\frac{d\mathfrak{F}}{dy}.$$

Nous obtenons alors pour le potentiel de tous les courants S′ sur le

courant S les deux formules

$$(d) \qquad W = -I\int (\mathfrak{A}\cos\lambda + \mathfrak{B}\cos\mu + \mathfrak{C}\cos\nu)\,d\sigma,$$

$$(e) \qquad W = -I\int \left(\mathcal{F}\frac{dx}{ds} + \mathcal{G}\frac{dy}{ds} + \mathcal{H}\frac{dz}{ds}\right) ds.$$

Enfin, si nous considérons le potentiel W d'un système d'aimants et de courants sur le courant S, nous poserons, au lieu des équations (b), les trois suivantes :

$$\Sigma I' X - \frac{dP}{dx} = \mathfrak{A}, \qquad \ldots,$$

en désignant par P le potentiel des aimants; puis nous poserons les formules (c), qui définiront $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, et le potentiel W sera encore donné par les formules (d) et (e).

La force dont les composantes sont $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ est la force magnétique exercée par les courants S′ et par les aimants.

2. *Action électrodynamique sur un élément de courant.* — Nous avons trouvé (Chap. II, n° 29), comme conséquence de la loi d'Ampère, que l'action du courant S′ sur un élément de courant $I\,ds$ a pour composantes

$$(f) \qquad \mathfrak{X} = II'\left(Z\frac{dy}{ds} - Y\frac{dz}{ds}\right) ds, \qquad \ldots.$$

Ensuite tout aimant peut être partagé en parties infiniment petites, assimilables à des éléments de doubles couches, et les actions de ces éléments de doubles couches peuvent être remplacées par celles de courants infiniment petits. D'après cela, désignons encore par $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ les composantes de la force magnétique provenant des courants et des aimants, et, en sommant des expressions telles que (f), nous aurons, pour l'action électrodynamique produite sur un élément de courant par les courants et les aimants, la force dont les composantes sont

$$\mathfrak{X} = I\left(\mathfrak{C}\frac{dy}{ds} - \mathfrak{B}\frac{dz}{ds}\right) ds, \quad \mathfrak{Y} = I\left(\mathfrak{A}\frac{dz}{ds} - \mathfrak{C}\frac{dx}{ds}\right) ds, \quad \mathfrak{Z} = I\left(\mathfrak{B}\frac{dx}{ds} - \mathfrak{A}\frac{dy}{ds}\right) ds.$$

3. *Idées d'Ampère sur le magnétisme.* — Bien que nous venions de substituer à l'action d'un aimant celle d'un nombre infini de courants fictifs, nous n'admettons nullement les idées d'Ampère sur le magnétisme.

Suivant Ampère, chaque particule d'un barreau aimanté renferme les deux électricités qui se meuvent en un circuit voltaïque permanent dans l'intérieur de cette particule.

Mais nous savons qu'un courant en général éprouve une résistance et, par suite, engendre de la chaleur. Il devrait donc se produire une dépense continuelle d'énergie dans un aimant, ce qui est absurde. Il est vrai que, pour éluder cette difficulté, on a fait la supposition que ces courants ne rencontrent aucune résistance; mais cette hypothèse n'a aucune vraisemblance.

Il faut remarquer aussi qu'on sait maintenant que tout système de courants permanents qui traversent un corps a un potentiel électromoteur, et nous verrons dans le Chapitre suivant que ce potentiel provient d'une double couche d'électricité qui enveloppe ces courants. Ainsi la théorie du magnétisme d'Ampère n'a pas même pour elle une apparence de simplicité.

Remarquons aussi que la polarisation électrique, que nous avons étudiée (*Théorie du potentiel*, IIe Partie, Chap. III et IV), est un phénomène tout semblable à celui du magnétisme, et le raisonnement d'Ampère ne peut même plus être essayé pour expliquer ce phénomène.

Force électromotrice d'induction.

4. Supposons que des aimants soient déplacés par rapport à un circuit conducteur S traversé par un courant et, pour simplifier, supposons que, pendant un instant dt de ce déplacement, l'intensité I du courant reste constante. Cette intensité I représente l'intensité du courant de la pile modifiée par l'induction.

Comme le potentiel W du courant sur les aimants renferme le facteur I, représentons-le par III. Le travail électromagnétique qui en provient pendant l'instant dt sera $-\frac{dW}{dt}dt$ ou $-I\frac{d\Pi}{dt}dt$ (Chap. II, n° 23). Le travail de la force électromotrice E, développé par une pile

dans le circuit conducteur, sera $EI\,dt$ (Chap. II, n° 1) et le travail qui produit la chaleur dans ce fil est $I^2R\,dt$, R étant la résistance du fil. Le travail développé par la pile doit être égal au travail absorbé dans les deux autres actions; ainsi l'on a

$$EI\,dt = I^2R\,dt - I\frac{d\Pi}{dt}\,dt$$

ou

$$E + \frac{d\Pi}{dt} = IR.$$

Ainsi la force électromotrice, qui serait E sans le déplacement des aimants, devient $E + \frac{d\Pi}{dt}$; donc $\frac{d\Pi}{dt}$ est la force électromotrice d'induction produite dans l'instant dt par le mouvement des aimants.

Au lieu de déplacer des aimants par rapport au circuit S, faisons mouvoir d'autres courants et admettons qu'on les puisse maintenir constants. Désignons encore par W ou III le potentiel de ces courants sur S; supposons aussi que l'intensité I de S reste constante pendant dt et, par le raisonnement précédent, on obtient encore $\frac{d\Pi}{dt}$ pour la force électromotrice induite dans S pendant cet instant.

La détermination de la force électromotrice d'induction par le principe de la conservation de l'énergie a été donnée, en 1846, par M. Helmholtz (*voir* tome I de ses Mémoires, p. 62).

Recherches de F. Neumann.

5. Franz Neumann a donné le premier, en 1845, une théorie mathématique des courants induits. Il est arrivé à ses résultats d'une manière assez longue, en s'appuyant sur la formule d'Ampère relative à l'action entre deux éléments de courant. Regardant le circuit inducteur comme fixe et le circuit induit comme mobile, il admet que la force électromotrice d'induction produite dans chaque élément du circuit induit est proportionnelle à la vitesse du déplacement de cet élément et à la composante de la force d'Ampère suivant la direction du déplacement.

Mais nous allons employer l'expression trouvée dans le numéro

précédent pour la force électromotrice d'induction à la détermination des résultats obtenus par Neumann.

Supposons un circuit inducteur S′ traversé par un courant d'intensité constante I′ et un autre circuit S qui n'est d'abord traversé par aucun courant. Si l'on produit un mouvement relatif entre les deux circuits, il en résultera dans S une force électromotrice d'induction

$$A = \frac{d\Pi}{dt},$$

Π étant le potentiel du courant S′ sur le circuit S supposé traversé par un courant égal à l'unité. Comme Π renferme I′ en facteur, posons

$$\Pi = -MI';$$

alors M sera le potentiel, changé de signe, d'un circuit sur l'autre, quand ces deux circuits sont traversés par un courant égal à l'unité et, d'après ce que nous avons vu (Chap. II, n° 22), on a

$$M = \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\, ds\, ds',$$

ε étant l'angle des éléments *ds*, *ds′* des deux circuits et *r* leur distance. Nous avons donc

$$A = -I'\frac{dM}{dt}.$$

L'intensité *j* du courant induit a évidemment pour valeur $\frac{A}{R}$, R étant la résistance du circuit S; ainsi nous avons

$$j = -\frac{I'}{R}\frac{dM}{dt}.$$

Si le circuit S est transporté d'une position connue à une autre, on aura pour le *courant intégral* induit, c'est-à-dire pour toute la quantité d'électricité qui traversera une section de ce conducteur pendant son mouvement,

$$J = \int j\, dt = -\frac{I'}{R}(M_1 - M_0),$$

l'indice 0 ou 1 indiquant qu'on prend la valeur de M à l'instant initial ou final.

6. Neumann passe ensuite de la manière suivante au cas où l'intensité I′ est variable :

Si, S restant fixe, nous amenons le courant S′ d'une distance infinie, nous aurons le courant intégral qui traversera S, en appliquant la formule précédente et y faisant $M_0 = 0$; nous avons ainsi, pour ce courant,

$$(a) \qquad J = -\frac{I'}{R} M_1.$$

Mais nous obtenons une action identique si S′, étant resté immobile dans la dernière position, est traversé brusquement par un courant d'intensité I′. Ainsi, dans ce cas encore, le courant intégral induit sera égal à (a).

Supposons ensuite que l'intensité I′, d'abord constante, se change brusquement en I'_1, l'intensité I′ se sera donc accrue de $I'_1 - I'$, et cet accroissement produira dans S le courant intégral d'induction

$$-\frac{I'_1 - I'}{R} M.$$

Enfin, si l'intensité I′ varie d'une manière continue, à l'accroissement dI' produit pendant dt correspondra le courant différentiel induit

$$j\,dt = -\frac{1}{R} M\,dI'.$$

Maintenant produisons simultanément un déplacement relatif des conducteurs et un changement dans l'intensité I′, le courant différentiel induit se composera des deux parties, dues à ces deux causes prises séparément, et nous aurons pour ce courant

$$j\,dt = -\frac{1}{R} M\,dI' - \frac{I'}{R} dM$$

ou

$$j\,dt = -\frac{1}{R} \frac{d(I'M)}{dt} dt.$$

Ainsi la force électromotrice d'induction sera $-\frac{d(I'M)}{dt}$, et nous

aurons pour le courant intégral

$$(b) \qquad J = -\frac{1}{R}[(I'M)_1 - (I'M)_0],$$

les indices ayant la même signification que ci-dessus.

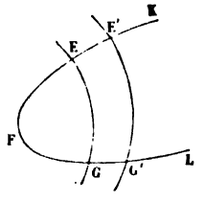
On voit donc que le courant intégral, ou la quantité d'électricité qui traverse une section du conducteur induit, ne dépend que de la valeur de I'M à l'instant initial et à l'instant final.

Le courant J pourra être constaté par l'aiguille d'un galvanomètre, et, si le temps qui s'écoule entre les deux positions extrêmes du système est très petit par rapport au temps que met l'aiguille du galvanomètre à se déplacer, la grandeur de la déviation ne dépendra que de J.

Les formules précédentes sont encore applicables si le conducteur S subit une déformation qui n'altère pas la grandeur de ses éléments.

Supposons ensuite que le conducteur S change de forme en prenant de nouveaux éléments, ainsi qu'il arriverait si le circuit se composait d'une pièce fixe KFL (*fig.* 14) fermée par une pièce mobile EG qui se

Fig. 14.



transporterait dans le temps t de EG en E'G'. Alors l'expression trouvée pour J ne serait plus admissible, parce que la résistance R du circuit serait variable et augmenterait par l'accroissement du circuit. Néanmoins, dans le temps dt, R peut être regardé comme constant, et l'on a encore, pour le courant différentiel,

$$j\,dt = -\frac{1}{R}d(I'M);$$

on a donc, pour le courant intégral, la formule

$$J = -\int_0^t \frac{1}{R} \frac{d(I'M)}{dt}\, dt,$$

dans laquelle R est considéré comme une fonction donnée de t. La force électromotrice d'induction est encore $-\frac{d(I'M)}{dt}$.

7. L'extra-courant est un courant produit par l'action d'un courant sur lui-même. On l'obtient en supposant dans la formule (b) que l'inducteur S′ coïncide avec le circuit induit S. On aura ainsi, pour le courant intégral qui provient de cette induction,

$$-\frac{1}{R}(I_1 L_1 - I_0 L_0),$$

en désignant par L le potentiel changé de signe du circuit sur lui-même, quand il est traversé par le courant-unité. La force électromotrice d'induction sera $-\frac{d(IL)}{dt}$. Remarquons que L n'est variable qu'autant que le circuit se déforme.

Supposons que le courant soit brusquement intercepté dans le circuit S. Alors l'intensité du courant passera de la valeur I à la valeur o; le courant subit donc un accroissement d'intensité égal à $-I$, et l'on aura, pour le courant intégral d'induction, l'expression $\frac{I}{R}L$.

Induction mutuelle de deux courants.

8. Soient I l'intensité du courant d'un circuit S, E la force électromotrice donnée que l'on communique à ce circuit, R la résistance du circuit et enfin L le potentiel changé de signe du circuit sur lui-même quand il est traversé par un courant-unité. Désignons les mêmes quantités relatives au second circuit S′ par les mêmes lettres accentuées, puis représentons par M le potentiel changé de signe de S sur S′ quand ces deux circuits sont traversés par un courant-unité.

La force électromotrice provenant de l'induction de S sur lui-même

est $-\frac{d(LI)}{dt}$ et la force électromotrice provenant de l'induction de S′ sur S est $-\frac{d}{dt}(MI')$. Ainsi nous avons cette équation relative au premier circuit

$$E-\frac{d}{dt}(LI+MI')=IR,$$

et nous aurons de même, pour le second circuit,

$$E'-\frac{d}{dt}(L'I'+MI)=I'R'.$$

Si l'on suppose que les deux circuits sont de forme invariable et sont fixés, alors L, L′, M sont des quantités constantes qu'on pourra obtenir, au moyen du calcul, d'après les figures des circuits ou, plus facilement, au moyen de certaines expériences. Les deux équations précédentes, qui sont différentielles du premier ordre par rapport à I et I′, pourront donc servir à déterminer ces deux inconnues.

Il en sera encore de même si les déplacements des deux circuits sont produits par l'expérimentateur, car L, M, L′ pourront alors être considérés comme des fonctions connues de t; mais ces deux équations ne suffiront plus à la détermination de I et I′ si les circuits sont mobiles et abandonnés à leur action électrodynamique.

Théorie de l'action mutuelle des circuits électriques.

9. Concevons un système quelconque de circuits électriques qui soient mobiles. Les courants agiront les uns sur les autres en déplaçant les conducteurs qui les portent et aussi en faisant varier leurs propres intensités. Enfin ces circuits pourront aussi être sollicités par des forces mécaniques autres que celles qui proviennent des courants.

On peut, comme l'a fait Maxwell, appliquer à ces mouvements les équations différentielles de Lagrange relatives à un système soumis à des liaisons.

Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_k$ les k variables indépendantes qui fixent à chaque instant un système mobile. Pendant un déplacement infini-

ment petit, le travail de toutes les forces qui agissent sur le système sera de cette forme

$$Q_1 \delta q_1 + Q_2 \delta q_2 + \ldots + Q_k \delta q_k,$$

le signe δ indiquant la variation des quantités q, et chaque coefficient Q_i de cette expression peut être considéré comme une force qui tend à faire croître la variable q_i. Désignons aussi par T la demi-force vive du système. Les k équations du mouvement seront renfermées dans la formule

$$\text{(A)} \qquad \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq_s'} - \frac{dT}{dq_s} = Q_s,$$

s étant susceptible des valeurs 1, 2, ..., k.

T est, en général, fonction des variables q_i et il est une fonction homogène et du second degré des quantités q_i', dérivées des q_i prises par rapport au temps t.

Adoptons ensuite pour le système en mouvement celui des circuits et de leurs courants. Nous avons vu dans le Chapitre I (n° 4) que l'intensité d'un courant est proportionnelle à la vitesse des molécules électriques. Ainsi nous devrons prendre pour une partie des dérivées q_i' des quantités proportionnelles aux intensités $I_1, I_2, \ldots, I_n$ des courants qui traversent les circuits, et les quantités q_i correspondantes n'entreront pas dans T; mais T dépendra, en outre, de r variables q_1, q_2, ..., q_r, qui déterminent les positions des circuits, et de leurs dérivées q_1', q_2', ..., q_r'. D'après cela, posons

$$\begin{aligned} T = &+ \tfrac{1}{2} L_1 I_1^2 + \tfrac{1}{2} L_2 I_2^2 + \ldots + M_{1,2} I_1 I_2 + \ldots \\ &+ H_1 q_1'^2 + H_2 q_2'^2 + \ldots + K_{1,2} q_1' q_2' + \ldots, \end{aligned}$$

les quantités L_1, L_2, $M_{1,2}$, ..., H_1, H_2, $K_{1,2}$, ... étant des fonctions de $q_1, q_2, \ldots, q_r$. Pour toute la généralité, il faudrait supposer que T renferme aussi des termes de la forme $U q_s' I_i$; mais nous verrons bientôt que T ne contient pas de pareils termes.

10. *Force électromotrice d'induction.* — Appliquons l'équation (A) à la détermination de la force électromotrice d'induction produite dans le circuit S_1, où l'intensité du courant est I_1. Pour cela, dans cette

équation remplaçons q'_s par I_s et supposons T indépendant de q_s. Alors Q_s représentera la force électromotrice E excitée dans le circuit, diminuée de la force RI_s de résistance du circuit. Nous aurons donc

$$E - \frac{d}{dt}\frac{dT}{dI_1} = RI_1.$$

Ainsi la force d'inertie $-\frac{d}{dt}\frac{dT}{dI_1}$ est la force électromotrice d'induction produite dans le circuit S_1.

Nous avons dit que T ne renferme point de termes de la forme Uq'_sI_1. Et, en effet, il en résulterait dans l'expression de la force électromotrice d'induction des termes de la forme

$$-\frac{d}{dt}(Uq'_s) = -\frac{dU}{dt}q'_s - U\frac{dq'_s}{dt};$$

par suite, sans l'action d'aucun courant extérieur et par le seul effet des mouvements des circuits, on produirait un courant dans le circuit S_1; ce qui peut être considéré comme contraire à l'expérience.

Nous avons donc pour la force électromotrice d'induction produite dans S_1

$$-\frac{d}{dt}\frac{dT}{dI_1} = -\frac{d}{dt}(L_1I_1 + M_{1,2}I_2 + M_{1,3}I_3 + \ldots).$$

Cette expression est toute semblable à celle que nous avons trouvée (n° 8) pour la même quantité. Donc L_1 représente le potentiel changé de signe du circuit S_1 sur lui-même, $M_{1,2}$ le potentiel changé de signe de S_1 sur S_2, etc., quand ces circuits sont traversés par un courant égal à l'unité.

11. *Action électrodynamique.* — Appliquons ensuite l'équation (A) à la détermination de la force électrodynamique, qui tend à faire croître une des variables q qui servent à fixer à chaque instant les positions des circuits.

Soit Q_s la force mécanique appliquée au système et qui tend à faire croître q_s; nous aurons

$$Q_s - \frac{d}{dt}\frac{dT}{dq'_s} + \frac{dT}{dq_s} = 0.$$

Partageons T en deux parties : l'une T_1 homogène et du second degré par rapport aux intensités I des courants, l'autre T_2 homogène et du second degré par rapport aux dérivées q'. Cette équation deviendra

$$Q_s + \frac{dT_1}{dq_s} - \left(\frac{d}{dt}\frac{dT_2}{dq'_s} - \frac{dT_2}{dq_s}\right) = 0.$$

La force d'inertie se compose donc de deux parties, dont la première, $\frac{dT_1}{dq_s}$, dépend seule des courants et donne la force appelée *électrodynamique*. La seconde partie,

$$-\frac{d}{dt}\frac{dT_2}{dq'_s} + \frac{dT_2}{dq_s},$$

se présente dans tout système en mouvement.

Action mutuelle de deux courants.

12. Nous avons trouvé (n° 8) ces deux équations relatives à l'induction de deux circuits

$$E - IR = \frac{d}{dt}(LI + MI'), \tag{1}$$

$$E' - I'R' = \frac{d}{dt}(L'I' + MI). \tag{2}$$

Supposons ces deux circuits mobiles et abandonnés à leur action électrodynamique. Désignons par $q_1, q_2, \ldots, q_r$ les r variables indépendantes qui déterminent les positions des deux circuits. On exprimera L, M, L′ au moyen de ces variables; on transformera aussi l'expression de la demi-force vive T_2 des conducteurs dans les variables q et leurs dérivées q', et, d'après le numéro précédent, on aura r équations de cette forme

$$\frac{d}{dt}\frac{dT_2}{dq'_s} - \frac{dT_2}{dq_s} = \frac{1}{2}\frac{dL}{dq_s}I^2 + \frac{dM}{dq_s}II' + \frac{1}{2}\frac{dL'}{dq_s}I'^2. \tag{3}$$

Il en résultera $r+2$ équations pour déterminer I, I′ et les r variables q.

Multiplions les équations (1) et (2) respectivement par $I\,dt$ et $I'dt$ et ajoutons : nous aurons

$$(4)\qquad (EI + E'I' - RI^2 - R'I'^2)dt = I\,d(LI + MI') + I'd(L'I' + MI).$$

Le premier membre de cette équation représente, pour le temps dt, l'excès du travail des piles sur le travail absorbé par la chaleur, et le second membre, pris avec signe contraire, représente le travail dû aux actions inductrices.

Changeons le signe du second membre de la formule (4) et, en le transformant, nous obtenons pour le travail élémentaire des actions inductrices

$$-\tfrac{1}{2}d(LI^2 + 2MII' + L'I'^2) - \tfrac{1}{2}(I^2dL + 2II'dM + I'^2dL').$$

Le travail élémentaire électrodynamique s'obtiendra en multipliant le second membre de l'équation (3) par dq, et ajoutant toutes les expressions semblables; ce qui donne

$$\tfrac{1}{2}(I^2dL + 2II'dM + I'^2dL').$$

Dans le cas où les deux circuits n'éprouvent pas de déformation et où les intensités I et I' restent constantes, le second membre de l'équation (4) se réduit à $2II'dM$ et le travail électrodynamique est égal à $II'dM$. Les piles doivent donc fournir un travail double du travail électrodynamique, en outre de celui qui est nécessaire pour vaincre la résistance des conducteurs; ce qui a été d'abord remarqué par W. Thomson.

Remarques sur la théorie précédente de l'induction des courants linéaires.

13. Nous verrons dans le Chapitre IV que, lorsqu'un conducteur homogène quelconque est traversé par un courant permanent, il se recouvre d'une double couche d'électricité dont le potentiel, joint au potentiel de l'électricité des fils qui apportent et emmènent le courant, est nul en tout point extérieur.

Or considérons deux circuits électriques et supposons que les cou-

rants soient apportés et emmenés pour chaque circuit par deux fils parallèles très voisins et très longs, dont les secondes extrémités soient très éloignées du circuit. L'action extérieure des couples de fils parallèles sera négligeable. Si ces deux circuits sont d'abord fixés et traversés par des courants permanents, ils se recouvriront de doubles couches et ces doubles couches sont sans action à l'extérieur. Mais, si l'un des circuits se déplace par rapport à l'autre, les courants seront modifiés et en même temps les doubles couches d'électricité changeront; de plus, il y aura de l'électricité libre à l'intérieur et à la surface du fil. Pour plus de commodité, nous donnerons à l'ensemble de la double couche et de l'électricité libre le nom d'*électricité libre*.

Or, dans la théorie des n°s 9-12, on tient compte seulement de l'action des courants et nullement de l'électricité libre. Cependant, si l'électricité libre de chacun des fils a une action extérieure, elle doit modifier l'électricité libre de l'autre fil, et ces deux électricités libres, modifiées par leurs actions mutuelles, agiraient à leur tour sur les courants. Les lois de l'induction des courants linéaires seraient donc plus compliquées que celles que nous avons obtenues. Donc, pour que la théorie précédente soit exacte, il faut admettre que l'électricité libre, en se modifiant sur chaque circuit, demeure cependant sans action à l'extérieur, comme lorsque les circuits sont traversés par des courants permanents.

Force électromotrice d'induction sur un circuit en mouvement.

14. Nous avons vu (n° 4) que la force électromotrice d'induction qui agit sur toute la longueur d'un courant fermé S est donnée par la formule $\frac{d\Pi}{dt}$, où l'on peut prendre pour Π (n° 1) l'expression

$$\Pi = -\int \left(\mathfrak{F} \frac{dx}{ds} + \mathfrak{G} \frac{dy}{ds} + \mathfrak{H} \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

l'intégrale étant étendue à tout le circuit S.

Supposons que le circuit S se meuve dans un champ contenant des aimants et des courants. Pour calculer $\frac{d\Pi}{dt}$, il faudra donc considérer

les points (x, y, z) du circuit S comme variables avec t, et nous aurons

$$\text{(A)}\qquad \begin{cases} \dfrac{d\Pi}{dt} = -\int\left(\dfrac{d\mathfrak{F}}{dt}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{d\mathfrak{G}}{dt}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{d\mathfrak{H}}{dt}\dfrac{dz}{ds}\right)ds \\ \qquad -\int\left(\dfrac{d\mathfrak{F}}{dx}\dfrac{dx}{ds} + \dfrac{d\mathfrak{G}}{dx}\dfrac{dy}{ds} + \dfrac{d\mathfrak{H}}{dx}\dfrac{dz}{ds}\right)\dfrac{dx}{dt}ds - \dots \\ \qquad -\int\left(\mathfrak{F}\dfrac{d^2x}{ds\,dt} + \mathfrak{G}\dfrac{d^2y}{ds\,dt} + \mathfrak{H}\dfrac{d^2z}{ds\,dt}\right)ds, \end{cases}$$

les points indiquant deux autres intégrales semblables à la seconde. Dans cette seconde intégrale remplaçons $\frac{d\mathfrak{G}}{dx}$ et $\frac{d\mathfrak{H}}{dx}$ par leurs valeurs tirées des équations (c) du n° 1; elle se changera en la suivante :

$$-\int\left(\mathfrak{C}\frac{dy}{ds} - \mathfrak{B}\frac{dz}{ds} + \frac{d\mathfrak{F}}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds.$$

Si l'on joint le dernier terme de cette expression au premier terme de la dernière intégrale de (A), on a

$$-\int\left(\frac{d\mathfrak{F}}{ds}\frac{dx}{dt} + \mathfrak{F}\frac{d^2x}{ds\,dt}\right)ds = -\int\frac{d}{ds}\left(\mathfrak{F}\frac{dx}{dt}\right)ds = 0.$$

On en conclut la première ligne de la formule suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\Pi}{dt} = &-\int\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\frac{dx}{ds}ds - \int\left(\mathfrak{C}\frac{dy}{ds} - \mathfrak{B}\frac{dz}{ds}\right)\frac{dx}{dt}ds \\ &-\int\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\frac{dy}{ds}ds - \int\left(\mathfrak{A}\frac{dz}{ds} - \mathfrak{C}\frac{dx}{ds}\right)\frac{dy}{dt}ds \\ &-\int\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\frac{dz}{ds}ds - \int\left(\mathfrak{B}\frac{dx}{ds} - \mathfrak{A}\frac{dy}{ds}\right)\frac{dz}{dt}ds, \end{aligned}$$

et les deux autres lignes s'en déduisent par analogie. Toutes les quantités soumises au signe d'intégration sont multipliées par $\frac{dx}{ds}$, $\frac{dy}{ds}$ ou $\frac{dz}{ds}$, et l'on peut écrire

$$\text{(B)}\qquad \frac{d\Pi}{dt} = -\int\left(\varphi_x\frac{dx}{ds} + \varphi_y\frac{dy}{ds} + \varphi_z\frac{dz}{ds}\right)ds,$$

en posant

$$\varphi_x = -\frac{d\mathfrak{F}}{dt} + \mathfrak{E}\frac{dy}{dt} - \mathfrak{B}\frac{dz}{dt},$$

$$\varphi_y = -\frac{d\mathfrak{G}}{dt} + \mathfrak{A}\frac{dz}{dt} - \mathfrak{E}\frac{dx}{dt},$$

$$\varphi_z = -\frac{d\mathfrak{H}}{dt} + \mathfrak{B}\frac{dx}{dt} - \mathfrak{A}\frac{dy}{dt}.$$

On obtient ainsi la force électromotrice d'induction produite sur le courant S. Mais, du raisonnement précédent, on ne peut conclure que la force électromotrice d'induction produite sur *ds* soit

$$(C) \qquad -\left(\varphi_x\frac{dx}{ds} + \varphi_y\frac{dy}{ds} + \varphi_z\frac{dz}{ds}\right)ds;$$

car, si l'on augmente les quantités φ_x, φ_y, φ_z respectivement de

$$\frac{d\chi}{dx}, \quad \frac{d\chi}{dy}, \quad \frac{d\chi}{dz},$$

en désignant par χ une fonction arbitraire de x, y, z et t, l'intégrale (B) n'est pas changée. Néanmoins, par d'autres considérations, nous serons conduits plus loin à regarder l'expression (C) comme représentant la force électromotrice d'induction qui agit sur *ds*.

Loi de Weber.

15. La loi d'Ampère donne l'action électrodynamique entre deux éléments de courants; on peut aussi d'une loi donnée par Wilhelm Weber déduire l'induction entre deux pareils éléments.

Weber a imaginé de considérer l'action de chaque molécule d'électricité positive ou négative d'un des éléments de courant sur chaque molécule d'électricité de l'autre élément de courant, et, par de certaines considérations physiques jointes à la supposition que l'expression analytique de cette action soit d'une forme simple, il fut conduit à la loi qui porte son nom; il vérifia ensuite que cette loi conduit à celle d'Ampère (*Mémoires de la Société Royale des Sciences de Saxe*, 1846).

Soient m et m' deux molécules électriques séparées par la distance r; Weber donne, pour l'action mutuelle qui s'exerce entre ces deux molécules, l'expression

$$(a) \qquad mm'\left(\frac{c^2}{r^2}+\frac{2}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2}\right),$$

cette force étant dirigée suivant la droite qui les joint et étant regardée comme positive lorsqu'elle est répulsive. Le premier terme de cette formule donne la loi de Coulomb et le second donne les actions électrodynamiques et d'induction. Le premier terme a été affecté d'un coefficient c^2, parce que l'unité de masse électrique n'a pas été prise la même dans l'électrostatique que dans l'électrodynamique. Cette formule peut aussi s'écrire

$$\frac{mm'}{r^2}\left[c^2-\frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+r\frac{d^2r}{dt^2}\right].$$

Pour calculer dans ce qui suit les actions des courants, nous pouvons réduire la formule (a) à son second terme.

16. Désignons par I et I′ les intensités des courants et par v et v' les vitesses de l'électricité positive dans les circuits fermés S et S′. Désignons aussi par s et s' des longueurs prises sur S et S′ à partir d'un point fixe. La position de chaque molécule d'électricité de S ou S′ sera déterminée par s ou s', et nous pouvons poser

$$\frac{ds}{dt}=v, \qquad \frac{ds'}{dt}=v'.$$

Soient m et m' deux molécules d'électricité positive situées respectivement sur S et S′; leur distance sera fonction de s, s' et t, et nous aurons

$$\frac{d\sqrt{r}}{dt}=\frac{d\sqrt{r}}{ds}v+\frac{d\sqrt{r}}{ds'}v'+\frac{\partial\sqrt{r}}{\partial t},$$

où le dernier terme indique une différentielle partielle par rapport à t et provient du déplacement relatif des circuits. Pour simplifier, supposons la section la même le long de chaque circuit et différentions

l'expression précédente par rapport à t; nous aurons

$$\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2} = \left(v^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds^2} + 2vv'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} + v'^2\frac{d^2\sqrt{r}}{ds'^2}\right) + 2v\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\,ds} + 2v'\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\,ds'} + \frac{\partial^2\sqrt{r}}{\partial t^2} + \frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{d\sqrt{r}}{ds'}\frac{\partial v'}{\partial t}.$$

En portant cette expression dans la formule

$$\frac{2mm'}{\sqrt{r}}\frac{d^2\sqrt{r}}{dt^2},$$

on aura l'action de m sur m'; la masse $-m$, située à la même place que m, exerce sur m' une action qui se déduit de celle-ci en changeant m en $-m$ et aussi v en $-v$, puisque la molécule $-m$ se meut avec une vitesse égale et contraire à celle de m. On en conclut pour l'action de m et $-m$ sur m'

$$(b)\qquad \frac{4mm'}{\sqrt{r}}\left(2vv'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} + 2v\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\,ds} + \frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

et, en changeant les signes de m' et v', on obtiendra pour l'action totale de m et $-m$ sur $-m'$

$$(c)\qquad \frac{4mm'}{\sqrt{r}}\left(2vv'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'} - 2v\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\,ds} - \frac{d\sqrt{r}}{ds}\frac{\partial v}{\partial t}\right).$$

Donc l'élément du circuit S', qui porte les masses m' et $-m'$, est sollicité de la part de l'élément du circuit S, qui porte les masses m et $-m$, par la force dirigée suivant la droite r

$$\psi = \frac{16mm'}{\sqrt{r}}vv'\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}.$$

Au lieu de prendre pour m et $-m$ deux molécules seulement, nous pouvons prendre l'électricité positive et l'électricité négative comprises entre deux sections droites de S distantes de ds; faisons de même pour

m' et $-m'$, et, d'après la définition du courant linéaire, nous aurons

$$2mv = \mathrm{I}\,ds, \qquad 2m'v' = \mathrm{I}'ds',$$

et il en résulte

$$\psi = \frac{4\mathrm{II}'\,ds\,ds'}{\sqrt{r}}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{ds\,ds'}$$

pour la force qui s'exerce entre les deux éléments de courants situés sur ds et ds', ce qui est effectivement la loi d'Ampère. (La force ψ est ici prise positive dans le sens contraire à celui qui avait été adopté dans le Chapitre II, n° 24.)

Mais, d'après les expressions (b) et (c), nous avons à considérer, en outre, la force

$$\chi = \frac{4mm'}{\sqrt{r}}\left(2v\,\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\,ds} + \frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{\partial v}{\partial t}\right),$$

dirigée suivant r et exercée par m et $-m$ sur m', et une force égale et contraire exercée sur $-m'$. Ces deux forces tendent donc à séparer les masses m' et $-m'$, et changent, par conséquent, l'intensité I′ du courant S′.

17. Si nous adoptons les notations du n° 24 du Chapitre II, la composante de la force χ qui agit sur m', prise suivant l'arc s', a pour grandeur $-\chi\cos\theta'$; le déplacement de m' suivant s' dans l'instant dt est $v'dt$. Ainsi le travail élémentaire de cette force est $-\chi\cos\theta'.v'dt$, et la force qui agit sur $-m'$ en sens contraire produit le même travail. On a donc, pour le travail de ces deux forces,

$$d\mathfrak{T} = -2\chi\cos\theta'.v'dt = -\frac{8mm'}{\sqrt{r}}\left(2v\,\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\,ds} + \frac{d\sqrt{r}}{ds}\,\frac{\partial v}{\partial t}\right)\cos\theta'.v'\,dt,$$

et, en y faisant

$$2mv = \mathrm{I}\,ds, \qquad 2m'v' = \mathrm{I}'ds',$$

$$2m\,\frac{dv}{dt} = \frac{d\mathrm{I}}{dt}\,ds, \qquad \cos\theta' = -\frac{dr}{ds'},$$

on aura

$$d\mathfrak{T} = \frac{2\mathrm{I}'}{\sqrt{r}}\left(2\mathrm{I}\,\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\,ds} + \frac{d\mathrm{I}}{dt}\,\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'\,dt.$$

Si l'on désigne par ε une force électromotrice qui agit sur une portion quelconque de fil traversée par un courant I', son travail élémentaire, en général, est $\varepsilon I' dt$. Nous obtenons donc cette formule pour la force électromotrice produite par l'élément de courant ds sur l'élément de courant ds'

$$\varepsilon = \frac{2}{\sqrt{r}}\left(2I\frac{d^2\sqrt{r}}{\partial t\, ds} + \frac{dI}{dt}\frac{d\sqrt{r}}{ds}\right)\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds',$$

et cette formule peut aussi s'écrire

$$\varepsilon = \frac{d}{dt}\left(\frac{I}{r}\right)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds' + 2\frac{I}{r}\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'.$$

18. Vérifions ensuite que cette loi élémentaire donne effectivement la loi de l'induction, trouvée précédemment, d'un circuit sur un autre circuit. Nous aurons la force électromotrice totale d'induction produite par le circuit S sur S', en intégrant ε tout le long de chaque circuit; nous aurons ainsi

$$\int\int \varepsilon = \int\int \frac{d}{dt}\left(\frac{I}{r}\right)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds' + 2I\int\int \frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'.$$

Or, en intégrant par parties et par rapport à s le dernier terme, on trouve que la valeur de ce terme ne change pas si l'on permute s avec s'. On a donc

$$\int\int \frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds' = \int\int \frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\,ds\,ds'$$

et, par suite,

$$\begin{aligned}\int\int \varepsilon &= \int\int\left[\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{r}\right)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + \frac{I}{r}\left(\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'} + \frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)\right]ds\,ds' \\ &= \frac{d}{dt}\left(I\int\int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\,ds'\right) = -\frac{d}{dt}\left(I\int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds'\right).\end{aligned}$$

Or on a (Chap. II, n° 27)

$$\int\int \frac{\cos\theta\cos\theta'}{r}\,ds\,ds' = \int\int \frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\,ds' = M;$$

il en résulte

$$\int\int \varepsilon = -\frac{d(\mathrm{MI})}{dt},$$

ce qui est conforme à ce que nous avons vu (n° 6).

19. Dans un Mémoire publié en 1880 dans les *Annales scientifiques de l'École Normale*, je me suis proposé de rechercher quelle doit être l'action d'une molécule électrique sur un autre, si l'on admet les principes suivants dans les mouvements accomplis par les actions des courants :

I. Le principe de la conservation de l'énergie;

II. Le principe de la réaction égale et directement opposée à l'action;

III. La supposition que les actions mutuelles de deux éléments de courants parallèles, de même sens et perpendiculaires à la droite qui joint leurs milieux, varient en raison inverse du carré de cette distance;

IV. La supposition que les actions mutuelles entre deux éléments de courants linéaires donnés en intensité et en position ne varient pas avec leurs courbures.

Alors, en admettant comme précédemment que chaque courant soit formé par deux mouvements égaux et opposés des deux électricités positive et négative, j'ai trouvé que l'action entre deux molécules électriques se compose de deux parties : l'une qui donne la force de Weber et l'autre qui renferme une fonction arbitraire. Mais cette seconde partie disparaît dans l'action de deux éléments de courants, laquelle se trouve être celle que donne la loi d'Ampère. Ensuite, par la condition qu'un courant fermé et constant soit sans action sur de l'électricité statique, la loi de Weber se trouve avoir lieu nécessairement.

Détermination par la loi de Weber de la force électromotrice d'induction produite sur un élément de courant.

20. Supposons d'abord que l'inducteur se réduise à un circuit fixe S, traversé par un courant d'intensité variable I et que l'élément ds' du courant induit soit en mouvement.

Pour avoir la force électromotrice d'induction $F\,ds'$ produite par le courant S sur l'élément ds' du circuit S', il faut intégrer l'expression de ε du n° 17 tout le long du circuit S; ce qui donne

$$F\,ds' = ds' \int \frac{d}{dt}\left(\frac{I}{r}\right)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds + 2I\,ds' \int \frac{1}{r}\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'}\,ds$$

ou

$$F\,ds' = ds' \int \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{I}{r}\right)\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} + \frac{I}{r}\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'} + \frac{I}{r}\frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right]ds$$
$$+ I\,ds' \int \frac{1}{r}\left(\frac{d^2r}{ds\,dt}\frac{dr}{ds'} - \frac{d^2r}{ds'\,dt}\frac{dr}{ds}\right)ds.$$

La première partie de cette expression se réduit à

$$\begin{aligned} P\,ds' &= ds'\,\frac{d}{dt}\left(I\int \frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'}\,ds\right) \\ &= ds'\,\frac{d}{dt}\left[I\int\left(\frac{1}{r}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{d^2r}{dr\,ds'}\right)ds\right] \\ &= -\,ds'\,\frac{d}{dt}\left(I\int\frac{\cos\varepsilon}{r}\,ds\right) \\ &= -\,ds'\,\frac{d}{dt}\left[I\int\frac{1}{r}\left(\frac{dx}{ds}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dy}{ds}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dz}{ds}\frac{dz'}{ds'}\right)ds\right]. \end{aligned}$$

Donc, si l'on pose

$$I\int\frac{1}{r}\frac{dx}{ds}\,ds = \mathfrak{F}, \qquad I\int\frac{1}{r}\frac{dy}{ds}\,ds = \mathfrak{G}, \qquad I\int\frac{1}{r}\frac{dz}{ds}\,ds = \mathfrak{H},$$

on a

$$P\,ds' = -\,ds'\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\frac{dx'}{ds'} + \frac{d\mathfrak{G}}{dt}\frac{dy'}{ds'} + \frac{d\mathfrak{H}}{dt}\frac{dz'}{ds'}\right)$$
$$-\,ds'\left(\mathfrak{F}\frac{d^2x'}{dt\,ds'} + \mathfrak{G}\frac{d^2y'}{dt\,ds'} + \mathfrak{H}\frac{d^2z'}{dt\,ds'}\right).$$

Désignons par $Q\,ds'$ la seconde partie de $F\,ds'$ et ainsi posons

$$Q = I\int\frac{1}{r}\left(\frac{d^2r}{dl\,ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{d^2r}{dt\,ds'}\frac{dr}{ds}\right)ds.$$

Représentons par dl' le déplacement du point (x', y', z') de ds'; nous

aurons

$$\frac{d^2r}{dt\,ds} = \frac{d^2r}{dl'\,ds}\frac{dl'}{dt}, \qquad \frac{d^2r}{dt\,ds'} = \frac{d^2r}{dl'\,ds'}\frac{dl'}{dt}$$

et, par suite,

$$Q = I\frac{dl'}{dt}\int\frac{1}{r}\left(\frac{d^2r}{dl'\,ds}\frac{dr}{ds'} - \frac{d^2r}{dl'\,ds'}\frac{dr}{ds}\right)ds.$$

Calculons la partie de Q qui dépend de $\frac{dx'}{ds'}$ et désignons-la par Q_1; comme nous avons

$$\frac{dr}{ds'} = \frac{x'-x}{r}\frac{dx'}{ds'} + \ldots,$$

$$\frac{d^2r}{dl'\,ds'} = \frac{x'-x}{r}\frac{d^2x'}{dl'\,ds'} - \frac{x'-x}{r^2}\frac{dr}{dl'}\frac{dx'}{ds'} + \frac{1}{r}\frac{dx'}{dl'}\frac{dx'}{ds'} + \ldots,$$

il en résulte

$$Q_1 = I\frac{dl'}{dt}\frac{dx'}{ds'}\int\left(\frac{x'-x}{r^2}\frac{d^2r}{dl'\,ds} + \frac{x'-x}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dl'} - \frac{1}{r^2}\frac{dr}{ds}\frac{dx'}{dl'}\right)ds$$
$$- I\frac{dl'}{dt}\frac{d^2x'}{dl'\,ds'}\int\frac{x'-x}{r^2}\frac{dr}{ds}ds.$$

On peut supprimer le dernier terme de la parenthèse, car son intégrale est nulle; puis, en ajoutant et retranchant un même terme, on a

$$Q_1 = I\frac{dl'}{dt}\frac{dx'}{ds'}\int\left(\frac{x'-x}{r^2}\frac{d^2r}{dl'\,ds} + \frac{x'-x}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dl'} + \frac{1}{r^2}\frac{dx}{ds}\frac{dr}{dl'}\right)ds$$
$$+ \frac{dl'}{dt}\frac{dx'}{ds'}\frac{d\mathfrak{F}}{dl'} - I\frac{dl'}{dt}\frac{d^2x'}{dl'\,ds'}\int\frac{x'-x}{r^2}\frac{dr}{ds}ds.$$

Q se compose de deux autres séries de termes, telles que Q_1, et qu'on déduit de Q_1 par analogie.

Désignons par P_1 la partie de P qui dépend de $\frac{dx'}{ds'}$ et, en remarquant qu'on a

$$\mathfrak{F} + I\int\frac{x'-x}{r^2}\frac{dr}{ds}ds = I\int\left(\frac{1}{r}\frac{dx}{ds} + \frac{x'-x}{r^2}\frac{dr}{ds}\right)ds = -I\int\frac{d}{ds}\frac{x'-x}{r}ds = 0,$$

nous obtenons

$$P_1+Q_1=-\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}-\frac{d\mathfrak{F}}{dl'}\frac{dl'}{dt}\right)\frac{dx'}{ds'}$$
$$+I\frac{dl'}{di}\frac{dx'}{ds'}\int\left(\frac{x'-x}{r^2}\frac{d^2r}{dl'\,ds}+\frac{x'-x}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dl'}+\frac{1}{r^2}\frac{dx}{ds}\frac{dr}{dl'}\right)ds.$$

Nous avons ensuite

$$\frac{(x'-x)^2}{r^3}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{x'-x}\frac{dr}{dl'}\right)=\frac{x'-x}{r^2}\frac{d^2r}{dl'\,ds}+\frac{x'-x}{r^3}\frac{dr}{ds}\frac{dr}{dl'}+\frac{1}{r^2}\frac{dx}{ds}\frac{dr}{dl'},$$

comme on le voit en développant la dérivation du premier membre. Ainsi la dernière intégrale peut s'écrire

$$(a)\qquad \int\frac{(x'-x)^2}{r^3}\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{x'-x}\frac{dr}{dl'}\right)ds.$$

Or on a

$$\frac{r}{x'-x}\frac{dr}{dl'}=\frac{dx'}{dl'}+\frac{y'-y}{x'-x}\frac{dy'}{dl'}+\frac{z'-z}{x'-x}\frac{dz'}{dl'},$$

et, en différentiant par rapport à s,

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{r}{x'-x}\frac{dr}{dl'}\right)=\frac{1}{(x'-x)^2}\left[(y'-y)\frac{dx}{ds}-(x'-x)\frac{dy}{ds}\right]\frac{dy'}{dl'}$$
$$-\frac{1}{(x'-x)^2}\left[(x'-x)\frac{dz}{ds}-(z'-z)\frac{dx}{ds}\right]\frac{dz'}{dl'}.$$

Remplaçons dans l'intégrale (a), qui devient

$$\frac{dy'}{dl'}\int\frac{1}{r^3}\left[(y'-y)\frac{dx}{ds}-(x'-x)\frac{dy}{ds}\right]ds$$
$$-\frac{dz'}{dl'}\int\frac{1}{r^3}\left[(x'-x)\frac{dz}{ds}-(z'-z)\frac{dx}{ds}\right]ds$$

ou

$$\left(\frac{d\mathfrak{G}}{dx'}-\frac{d\mathfrak{F}}{dy'}\right)\frac{1}{I}\frac{dy'}{dl'}-\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz'}-\frac{d\mathfrak{H}}{dx'}\right)\frac{1}{I}\frac{dz'}{dl'},$$

ou encore, en introduisant les composantes de la force magnétique (n° 1),

$$\mathfrak{C}\frac{1}{I}\frac{dy'}{dl'}-\mathfrak{B}\frac{1}{I}\frac{dz'}{dl'}.$$

En remplaçant dans l'expression de $P_1 + Q_1$ l'intégrale par cette valeur, on obtient enfin

$$P_1 + Q_1 = -\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt} - \frac{d\mathfrak{F}}{dl'}\frac{dl'}{dt}\right)\frac{dx'}{ds'} + \left(\mathfrak{S}\frac{dy'}{dt} - \mathfrak{V}\frac{dz'}{dt}\right)\frac{dx'}{ds'}.$$

Désignons par $\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right)$ la dérivée partielle de $\mathfrak{F}$ relative au circuit s seulement, c'est-à-dire en regardant x', y', z' comme constants, nous aurons

$$\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right) = \frac{d\mathfrak{F}}{dt} - \frac{d\mathfrak{F}}{dl'}\frac{dl'}{dt},$$

et, par suite,

$$P_1 + Q_1 = \left[-\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right) + \mathfrak{S}\frac{dy'}{dt} - \mathfrak{V}\frac{dz'}{dt}\right]\frac{dx'}{ds'}.$$

F contient deux autres expressions semblables, et l'on a

$$F = \left[-\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right) + \mathfrak{S}\frac{dy'}{dt} - \mathfrak{V}\frac{dz'}{dt}\right]\frac{dx'}{ds'} + \ldots.$$

D'après cela, considérons une force φ qui a pour composantes

$$-\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dt}\right) + \mathfrak{S}\frac{dy'}{dt} - \mathfrak{V}\frac{dz'}{dt},$$
$$-\left(\frac{d\mathfrak{G}}{dt}\right) + \mathfrak{A}\frac{dz'}{dt} - \mathfrak{S}\frac{dx'}{dt},$$
$$-\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dt}\right) + \mathfrak{V}\frac{dx'}{dt} - \mathfrak{A}\frac{dy'}{dt},$$

et nous obtiendrons la force électromotrice F qui agit en un point de ds', en projetant φ sur la tangente à ds'.

21. Si, au lieu d'un courant inducteur, nous en avons plusieurs, nous poserons

$$\Sigma I\int \frac{1}{r}\frac{dx}{ds}ds = \mathfrak{F}, \qquad \Sigma I\int \frac{1}{r}\frac{dy}{ds}ds = \mathfrak{G}, \qquad \Sigma I\int \frac{1}{r}\frac{dz}{ds}ds = \mathfrak{H},$$

le signe de sommation Σ se rapportant à tous ces courants; nous déterminerons $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{V}$, $\mathfrak{S}$, au moyen de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ comme précédemment, et la

force électromotrice exercée sur ds' s'obtiendra par la règle précédente.

Enfin, si, outre les courants S, il y a des aimants inducteurs, on raisonnera comme au n° 2, on pourra concevoir que chaque aimant est remplacé par une série de courants infiniment petits, auxquels correspondront des fonctions telles que $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, et la même règle sera encore applicable pour déterminer la force électromotrice qui agit sur ds'.

Remarquons, en terminant ce sujet, que de la loi de Weber relative à l'action mutuelle de deux molécules électriques on déduit :

1° La loi d'Ampère relative à l'action mutuelle de deux éléments de courants;

2° L'action électrodynamique sur un élément de courant, puisqu'elle est une conséquence de la loi d'Ampère (n° 2);

3° La force électromotrice d'induction produite sur un élément de courant.

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES COURANTS PERMANENTS DANS DES CONDUCTEURS DE FORME QUELCONQUE.

1. Si un conducteur homogène, de forme quelconque, est traversé par des courants électriques, provenant d'actions constantes, ces courants seront permanents. Nous nous sommes déjà occupés, dans le Chapitre I, de ces courants dans un conducteur à trois dimensions, et nous avons vu que le potentiel V de l'électricité satisfait en tout point de l'intérieur du conducteur à l'équation

$$\Delta V = 0.$$

Si l'on désigne par x la conductibilité du corps pour l'électricité, les composantes de l'intensité du courant ont pour valeur en chaque point (x, y, z)

$$-x\frac{dV}{dx}, \quad -x\frac{dV}{dy}, \quad -x\frac{dV}{dz}.$$

L'équation

$$V = \text{const.}$$

représente les surfaces de niveau et les courants sont normaux à ces surfaces.

Pour les surfaces du conducteur qui sont libres, c'est-à-dire au contact de l'air, les courants sont dirigés suivant ces surfaces, et l'on a, en désignant par dn' l'élément de normale intérieure,

$$\frac{dV}{dn'} = 0.$$

Conducteur traversé par un courant entrant et sortant par deux points de sa surface.

2. Plaçons les deux extrémités de deux fils métalliques très fins en contact avec la surface d'un conducteur aux deux points A et A′, le reste de cette surface étant isolé, et relions ces deux fils aux pôles d'une pile galvanique.

Le potentiel V doit provenir d'une couche d'électricité située sur la surface du corps; mais, comme, les contacts des fils étant supposés réduits aux points A et A′, V doit être infini en ces points, il faut supposer aux points A et A′ deux masses finies d'électricité C et C′ et nous poserons

$$V = \frac{C}{t} + \frac{C'}{t'} + U,$$

U étant le potentiel d'une couche électrique située sur la surface et t et t' étant les distances des points A et A′ au point (x, y, z). Cette introduction des deux premiers termes de V peut ne pas paraître parfaitement claire; mais elle sera complètement expliquée plus loin.

Désignons par I l'intensité du courant qui entre par A et sort par A′, et considérons ces deux points comme situés dans le conducteur à une distance infiniment petite de la surface. Autour du point A, décrivons une sphère d'un rayon infiniment petit ε et située dans la surface du conducteur. Sur cette surface, V pourra être réduit à son premier terme et l'on aura

$$I = -4\pi\varepsilon^2 \times \frac{dV}{dt} = 4\pi \times C.$$

On en conclut pour la constante C la valeur

$$C = \frac{I}{4\pi\times},$$

et l'on a de même

$$C' = -\frac{I}{4\pi\times} = -C;$$

l'expression de V devient donc

$$V = \frac{I}{4\pi\times}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + U.$$

Sur la couche électrique qui produit le potentiel électromoteur.

3. Un conducteur étant traversé par des courants permanents qui entrent par un point A et sortent par A′, le potentiel V est donc exprimé par la formule

$$V = C\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + U,$$

et la fonction U est définie par les conditions suivantes : U est fini et continu, ainsi que ses dérivées du premier ordre, excepté sur la surface σ qui limite le corps; il satisfait dans tout l'espace à l'équation

$$\Delta U = 0$$

et sur la surface σ à la condition

$$C\frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + \frac{dU}{dn'} = 0. \tag{1}$$

La fonction U n'est ainsi déterminée à l'intérieur qu'à une constante additive près, qui représentera le potentiel d'une couche électrostatique, dont l'action sur les points intérieurs sera nulle. Faisons abstraction de cette constante.

Considérons une fonction P donnée par la formule

$$P = \int \frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\varphi\, d\sigma \qquad \text{avec} \qquad \varphi = \frac{1}{4\pi}V_0,$$

où V_0 désigne la valeur de V à la surface et r la distance du point (x, y, z) à l'élément $d\sigma$. La fonction P représente le potentiel d'une double couche d'électricité, analogue aux doubles couches magnétiques que nous avons considérées précédemment et, adoptant un terme déjà employé, nous appellerons φ la puissance de la double couche électrique. Nous allons démontrer qu'à l'intérieur du conducteur P est égal à U.

Remplaçons φ par sa valeur dans P et il s'agit de prouver que l'on a

$$(2) \qquad \frac{C}{4\pi}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right)\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\,d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\,U\,d\sigma=U,$$

t et t' étant les distances de $d\sigma$ aux points A et A', et U dans le premier membre désignant la valeur de cette fonction sur $d\sigma$.

Nous avons (Chap. II, n° 13)

$$(3) \qquad 4\pi U=\int U\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\,d\sigma-\int\frac{1}{r}\frac{dU}{dn'}\,d\sigma$$

ou

$$(4) \qquad \int U\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}\,d\sigma=4\pi U+\int\frac{1}{r}\frac{dU}{dn'}\,d\sigma,$$

ce qui transforme le second terme de la formule (2); mais, pour transformer le premier terme, il est nécessaire de reprendre la démonstration qui a servi à établir (3).

Nous avons la formule générale

$$(5) \qquad \int v\,\Delta w\,d\varpi-\int w\,\Delta v\,d\varpi=-\int v\frac{dw}{dn'}\,d\sigma+\int w\frac{dv}{dn'}\,d\sigma,$$

les intégrales du premier membre étant étendues à tous les éléments de volume $d\varpi$ du conducteur et celles du second membre à tous les éléments $d\sigma$ de sa surface. Toutefois, si l'on fait $w=\frac{1}{r}$, $v=\frac{1}{t}$, il faudra enlever au volume les éléments dans lesquels ces fonctions deviennent infinies. Nous avons dit (n° 2) que le point A doit être regardé comme intérieur à la surface σ et situé à une distance infiniment petite de cette surface. D'après cela, décrivons une sphère infiniment petite autour du point (x, y, z) et une autre sphère infiniment petite de rayon ε autour de A et située à l'intérieur de σ; puis appliquons la formule précédente au volume du conducteur diminué de ces deux sphères. Désignons respectivement par σ' et σ'' les surfaces de ces deux sphères. En remarquant que le premier membre de l'équation (5)

est nul, nous aurons

$$(A)\quad \left\{\begin{aligned} 0 = &-\int \frac{1}{t}\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}d\sigma + \int \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{t}}{dn'}d\sigma \\ &-\int \frac{1}{t}\frac{d\frac{1}{r}}{dr}d\sigma' + \int \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{t}}{dr}d\sigma' \\ &-\int \frac{1}{t}\frac{d\frac{1}{r}}{d\varepsilon}d\sigma'' + \int \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{t}}{d\varepsilon}d\sigma''. \end{aligned}\right.$$

Or, on reconnaît facilement que les quatrième et cinquième intégrales sont nulles et que les troisième et sixième sont égales à $-4\pi\frac{1}{T}$, T étant la distance du point (x, y, z) à A, et, comme elles entrent avec des signes contraires, elles se détruisent. Ainsi l'équation se réduit à

$$(6)\quad \int \frac{1}{t}\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}d\sigma = \int \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{t}}{dn'}d\sigma;$$

on a de même

$$(7)\quad \int \frac{1}{t'}\frac{d\frac{1}{r}}{dn'}d\sigma = \int \frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{t'}}{dn'}d\sigma.$$

Substituons (4), (6), (7) dans (2) et nous obtenons

$$\int \frac{1}{r}\left[C\frac{d}{dn'}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right)+\frac{dU}{dn'}\right]d\sigma = 0;$$

ce qui est exact d'après l'équation (1).

Ainsi, il est démontré que la fonction P se confond avec U à l'intérieur du conducteur; prouvons maintenant que P se réduit à

$$-C\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right)$$

pour les points extérieurs.

4. Désignons par dn l'élément de normale extérieure; il s'agit de prouver qu'on a

$$\frac{C}{4\pi}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right)\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma+\frac{1}{4\pi}\int U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=C\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right). \tag{8}$$

Le point (x, y, z) étant maintenant extérieur, on a, au lieu de l'équation (3),

$$\int U\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=\int\frac{1}{r}\frac{dU}{dn}d\sigma. \tag{9}$$

Nous pouvons encore appliquer l'équation (A); mais, comme le point (x, y, z) est situé en dehors du conducteur, nous n'avons plus à mener la surface σ' autour de ce point; il faut donc supprimer les troisième et quatrième intégrales de cette équation; mais la cinquième intégrale sera encore nulle et la sixième égale à $-4\pi\frac{1}{t}$. On a donc, en remplaçant les dérivées par rapport à n' par des dérivées par rapport à n, ce qui change leur signe,

$$\int\frac{1}{t}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=4\pi\frac{1}{t}+\int\frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{t}}{dn}d\sigma; \tag{10}$$

on a de même

$$\int\frac{1}{t'}\frac{d\frac{1}{r}}{dn}d\sigma=4\pi\frac{1}{t'}+\int\frac{1}{r}\frac{d\frac{1}{t'}}{dn}d\sigma. \tag{11}$$

Substituons (9), (10) et (11) dans (8) et nous aurons

$$\int\frac{1}{r}\left[C\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right)+\frac{dU}{dn}\right]d\sigma=0. \tag{12}$$

Tous les résultats précédents sont des conséquences rigoureuses de l'Analyse. Mais, maintenant, admettons que la fonction U, qui se confond avec P à l'intérieur du conducteur, coïncide aussi avec P à l'extérieur; U sera donc le potentiel d'une double couche, il variera d'une manière discontinue à travers la surface σ; mais sa dérivée, suivant la

normale, variera d'une manière continue; on aura donc

$$\frac{dU}{dn} = -\frac{dU}{dn'},$$

et la formule (1) pourra s'écrire

$$C\frac{d}{dn}\left(\frac{1}{l} - \frac{1}{l'}\right) + \frac{dU}{dn} = 0;$$

l'équation (12) est donc satisfaite.

Ainsi, à l'extérieur, U a la valeur que nous avons indiquée et, par suite, V est nul.

On admet généralement que U est le potentiel d'une couche simple d'électricité; regardons, d'après ce qui précède, U comme le potentiel d'une double couche d'électricité située sur la surface σ, et nous aurons le théorème suivant :

Quand un corps est traversé par des courants permanents, sa surface se recouvre d'une double couche d'électricité dont l'action, jointe à celle des points A *et* A', *produit la force électromotrice sur les points intérieurs, tandis que l'action totale de cette couche et des points* A *et* A' *est nulle à l'extérieur.* Le corps peut, en outre, être recouvert d'une couche électrostatique dont l'action totale est nulle à l'intérieur.

5. La double couche d'électricité qui recouvre le conducteur est analogue aux doubles couches magnétiques fictives employées par Ampère en Électrodynamique et à la double couche qui se trouve au contact de deux métaux dans le principe de Volta; mais la puissance de la double couche est ici variable et égale à $\frac{1}{4\pi}$ V.

Cette double couche n'est pas plus difficile à concevoir que celle qui se présente sur les surfaces de contact de deux métaux, une couche se trouvant sur le conducteur et l'autre dans l'air à une distance excessivement petite.

Par la substitution d'une double couche à une simple couche électrique, les courants ne sont pas altérés et l'action magnétique de ces courants reste encore la même; mais la double couche sera sans action à l'extérieur et s'obtiendra immédiatement, quand on aura calculé le

potentiel V. Au contraire, dans l'hypothèse d'une simple couche électromotrice, la densité D de cette couche est donnée par la formule

$$D = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{dV}{dn'} + \frac{dV'}{dn}\right) = -\frac{1}{4\pi}\frac{dV'}{dn},$$

en désignant par V′ le potentiel extérieur de cette couche. Par conséquent, outre la détermination de la fonction V, il faut encore, pour achever la solution du problème, faire celle de V′, qui est souvent beaucoup plus difficile. Ainsi, par exemple, nous déterminerons plus loin le potentiel V relatif aux courants qui traversent un parallélépipède rectangle et la recherche de la fonction V′, dans ce problème, serait extrêmement difficile.

Ainsi, cette théorie doit être considérée comme plus simple que l'ancienne, et je ferai remarquer, sans que je veuille pourtant trop insister sur cette raison, que l'histoire des Sciences physiques montre que, de deux théories qui semblent d'abord satisfaire également à l'expérience, la plus simple est celle qui a le plus de chance d'être la vraie.

En généralisant le principe de la réaction égale et directement opposée à l'action, on peut s'expliquer cette double couche de la manière suivante. Le potentiel V se compose de deux parties : l'une, U, qui provient d'une couche d'électricité située à la surface du conducteur et d'une autre partie qui provient, comme nous verrons plus loin, de l'électricité qui se trouve sur les électrodes. Or, bien que la cause première du mouvement de l'électricité réside dans la pile, on peut néanmoins, dans les deux théories, regarder la force électromotrice comme émanant de la surface du conducteur et des fils; cette force sépare les deux électricités à l'intérieur du conducteur. Donc, réciproquement, l'intérieur du conducteur doit être le siège de forces qui séparent les deux électricités sur la surface du conducteur, et l'on arrive ainsi à la conception de la double couche située à la surface.

On peut maintenant se proposer d'expliquer le résultat d'expériences de Thomson indiqué Chap. II, n°s 2 et 3. La force électromotrice au contact de deux métaux est produite par la double couche qui se trouve à ce contact. Or, lorsque le corps formé par ces deux métaux est traversé par un courant permanent, sa surface libre se recouvre d'une double couche d'électricité, et il est naturel de penser qu'en

même temps la double couche, qui se trouve sur la surface de séparation des deux métaux, se modifie; ce qui explique le résultat obtenu par Thomson.

Détermination de la force magnétique des courants.

6. Nous avons calculé (Chap. II, n° 22) la force magnétique qui provient d'un courant linéaire fermé. Pour cela, nous avons considéré les fonctions

$$F = \int \frac{1}{r}\frac{dx'}{ds}ds, \qquad G = \int \frac{1}{r}\frac{dy'}{ds}ds, \qquad H = \int \frac{1}{r}\frac{dz'}{ds}ds,$$

r étant la distance d'un point quelconque (x, y, z) à un point (x', y', z') situé sur ds et les intégrales étant prises pour tous les éléments ds du circuit fermé. Désignons par I l'intensité du courant linéaire, par τ la section du fil qui peut être variable et par i l'intensité du courant par unité de surface. Posons

$$\mathfrak{F} = IF, \qquad \mathfrak{G} = IG, \qquad \mathfrak{H} = IH,$$

et désignons par u, v, w les composantes de i; nous aurons, en remarquant que I est égal à $i\tau$,

$$\mathfrak{F} = \int \frac{1}{r} i\frac{dx'}{ds}\tau\, ds = \int \frac{1}{r} u\, d\varpi,$$

où $d\varpi$ désigne l'élément de volume $\tau\, ds$. On a de même

$$\mathfrak{G} = \int \frac{v}{r} d\varpi, \qquad \mathfrak{H} = \int \frac{w}{r} d\varpi.$$

Ensuite, d'après ce qu'on a vu à l'endroit cité, les composantes de la force magnétique du courant linéaire sur le point (x, y, z) sont

$$I\left(\frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}\right) = \frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz}, \qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx}, \qquad \frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy}.$$

Prenons dans chacune de ces expressions l'élément d'intégrale qui est multipliée par $d\varpi$; nous considérerons ces trois éléments d'inté-

grale comme les composantes de la force provenant de l'élément $d\varpi$ et agissant sur l'unité de fluide magnétique placée au point (x, y, z).

7. Passons de là aux courants permanents d'un conducteur quelconque et décomposons-les en courants linéaires; nous pourrons appliquer à chacun de ces courants les formules précédentes. Posons donc

$$\mathcal{F} = \int \frac{u}{r} d\varpi, \qquad \mathcal{G} = \int \frac{v}{r} d\varpi, \qquad \mathcal{H} = \int \frac{w}{r} d\varpi,$$

en étendant les intégrales à tout le volume du conducteur; nous aurons pour les composantes de la force magnétique provenant de tous les courants du conducteur et agissant sur le point (x, y, z)

$$X = \frac{d\mathcal{H}}{dy} - \frac{d\mathcal{G}}{dz}, \qquad Y = \frac{d\mathcal{F}}{dz} - \frac{d\mathcal{H}}{dx}, \qquad Z = \frac{d\mathcal{G}}{dx} - \frac{d\mathcal{F}}{dy}.$$

8. Remarquons que, d'après les expressions de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, on a, à l'intérieur du conducteur,

$$\Delta\mathcal{F} = -4\pi u, \qquad \Delta\mathcal{G} = -4\pi v, \qquad \Delta\mathcal{H} = -4\pi w,$$

et les premiers membres de ces équations sont nuls en dehors du conducteur.

D'autre part, si l'on désigne par x', y', z' les coordonnées de $d\varpi$, on a

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz} &= \int \left(u \frac{dr^{-1}}{dx} + v \frac{dr^{-1}}{dy} + w \frac{dr^{-1}}{dz} \right) d\varpi \\
&= -\int \left(u \frac{dr^{-1}}{dx'} + v \frac{dr^{-1}}{dy'} + w \frac{dr^{-1}}{dz'} \right) d\varpi \\
&= -\int (u \cos\lambda + v \cos\mu + w \cos\nu) \frac{d\sigma}{r} \\
&\quad + \int \left(\frac{du}{dx'} + \frac{dv}{dy'} + \frac{dw}{dz'} \right) \frac{d\varpi}{r},
\end{aligned}$$

λ, μ, ν étant les angles de la normale extérieure avec les axes des x, y, z.

Le mouvement étant permanent, la seconde intégrale a tous ses éléments nuls et il reste l'équation

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz} = -\int (u \cos\lambda + v \cos\mu + w \cos\nu) \frac{d\sigma}{r},$$

le point (x, y, z) étant d'ailleurs intérieur ou extérieur.

Si les courants entrent et sortent sur le conducteur par deux points A et A′ seulement, l'intégrale précédente n'aura une valeur que par les éléments situés en A et A′, et l'on en conclut, en désignant par I l'intensité totale du courant qui entre en A et par t et t' les distances du point (x, y, z) aux points A et A′,

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} + \frac{d\mathfrak{G}}{dy} + \frac{\mathfrak{H}}{dz} = \mathrm{I}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right).$$

9. Les composantes X, Y, Z de la force magnétique peuvent être assimilées à des potentiels. En effet, on a

$$\mathrm{X} = \int\left(w\frac{dr^{-1}}{dy} - v\frac{dr^{-1}}{dz}\right)d\varpi = -\int\left(w\frac{dr^{-1}}{dy'} - v\frac{dr^{-1}}{dz'}\right)d\varpi$$
$$= \varkappa\int\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz'}\frac{dr^{-1}}{dy'} - \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\frac{dr^{-1}}{dz'}\right)d\varpi.$$

Appliquons l'intégration par parties à chacun des termes; les intégrales relatives au volume se détruisent et il reste

$$\mathrm{X} = \varkappa\int\left(\frac{d\mathrm{V}}{dz'}\cos\mu - \frac{d\mathrm{V}}{dy'}\cos\nu\right)\frac{d\sigma}{r}.$$

X peut donc être considéré comme le potentiel d'une couche distribuée sur σ; il en est de même de Y et Z. Par suite, on a dans tout l'espace

$$\Delta\mathrm{X} = 0, \qquad \Delta\mathrm{Y} = 0, \qquad \Delta\mathrm{Z} = 0.$$

Expression des composantes du courant au moyen des composantes de la force magnétique.

10. Considérons une courbe plane s. Supposons qu'un courant linéaire fermé S dont l'intensité est J traverse l'espace plan compris par s, et désignons par X, Y, Z les composantes de la force magnétique qui provient de ce courant. D'après ce que nous avons vu (Chap. II, n° 16), nous aurons

$$\mathrm{J} = \frac{1}{4\pi}\int(\mathrm{X}\,dx + \mathrm{Y}\,dy + \mathrm{Z}\,dz), \tag{1}$$

l'intégrale étant prise tout le long de la courbe s. Si l'on a un nombre quelconque de courants linéaires qui passent à travers la courbe s, on pourra appliquer à chacun une équation semblable. Si, en outre, il existe des courants qui ne traversent pas la ligne s, on aura, pour chacun de ces courants,

$$0 = \frac{1}{4\pi}\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz). \tag{2}$$

Donc, en ajoutant toutes les équations semblables à (1) et (2), on aura une équation qu'on peut représenter par (1) et où alors J désignera l'intensité totale des courants qui traverseront s, tandis que X, Y, Z seront les composantes de la force magnétique qui provient de tous les courants, et l'intégrale sera encore prise le long de la courbe s.

Ensuite, au lieu de courants linéaires séparés, supposons des courants continus et permanents, et nous pourrons également appliquer l'équation (1) à ces courants.

11. Cela posé, par un point quelconque (x, y, z) d'un conducteur traversé par des courants permanents, menons un rectangle $dx\,dy$ dont les côtés infiniment petits dx, dy sont parallèles aux axes des x et y. Désignons par u, v, w les composantes de l'intensité du courant au point (x, y, z); le courant, qui traversera ce rectangle dans le sens des z positifs, aura pour valeur

$$w\,dx\,dy,$$

et, si nous appliquons la formule (1), nous aurons

$$w\,dx\,dy = \frac{1}{4\pi}\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz),$$

l'intégrale étant prise le long du périmètre du rectangle.

Appliquons ensuite ce théorème donné (Chap. II, n° 20) : Si s est une ligne fermée et σ une surface passant par cette ligne et qui y est limitée, on a

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \int \left[l\left(\frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz}\right) + m\left(\frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}\right) + n\left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right)\right] d\sigma,$$

la première intégrale étant prise tout le long de la ligne s et la seconde sur toute la surface σ. Enfin, l, m, n sont les cosinus directeurs de la normale positive menée à σ.

En prenant pour la ligne s le rectangle infiniment petit dont les côtés sont dx et dy, nous aurons à faire $l = 0$, $m = 0$, $n = 1$, et il en résulte

$$\int (X\,dx + Y\,dy + Z\,dz) = \left(\frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy}\right) dx\,dy.$$

Nous en concluons la première des trois équations semblables

$$4\pi w = \frac{dY}{dx} - \frac{dX}{dy},$$
$$4\pi u = \frac{dZ}{dy} - \frac{dY}{dz},$$
$$4\pi v = \frac{dX}{dz} - \frac{dZ}{dx}.$$

Pour démontrer ces équations, nous avons supposé le mouvement permanent, et il est facile de voir qu'effectivement elles ne sont pas vraies dans le cas général; car on en déduit l'équation

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

d'après laquelle la densité de l'électricité est nulle ou au moins indépendante du temps.

Expression du potentiel de l'électricité qui n'est pas sur le conducteur.

12. D'après ce qui précède, les composantes u, v, w du courant peuvent s'exprimer de deux manières : soit par les composantes de la force électromotrice au moyen des formules

$$u = -\varkappa \frac{dV}{dx}, \qquad v = -\varkappa \frac{dV}{dy}, \qquad w = -\varkappa \frac{dV}{dz},$$

soit par les composantes de la force magnétique au moyen des formules du numéro précédent.

Le potentiel V se composera du potentiel V_1 de la double couche située à la surface du conducteur et du potentiel V_2 de l'électricité extérieure. Désignons par u_1, v_1, w_1 les composantes du courant provenant de V_1, et par u_2, v_2, w_2 celles qui proviennent de V_2. Désignons aussi par X_1, Y_1, Z_1 et par X_2, Y_2, Z_2 les composantes électromagnétiques correspondantes. Nous aurons

$$u_1 = -\varkappa \frac{dV_1}{dx} = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{dZ_1}{dy} - \frac{dY_1}{dz}\right).$$

Remplaçons X_1, Y_1, Z_1 par leurs valeurs en fonction de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ données n° 7 et nous aurons

$$-4\pi\varkappa \frac{dV_1}{dx} = \frac{d^2\mathcal{G}}{dx\,dy} - \frac{d^2\mathcal{F}}{dy^2} - \frac{d^2\mathcal{F}}{dz^2} + \frac{d^2\mathcal{H}}{dx\,dz} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz}\right) - \Delta\mathcal{F},$$

les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ étant les intégrales de ce numéro étendues au conducteur seulement. Or nous avons

$$\Delta\mathcal{F} = -4\pi u = 4\pi\varkappa\left(\frac{dV_1}{dx} + \frac{dV_2}{dx}\right),$$

qui, substitué dans l'équation précédente, donne

$$4\pi\varkappa \frac{dV_2}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz}\right).$$

Comme on a deux équations semblables pour les dérivées de V_2 par rapport à y et z, on obtient, à une constante additive près, qui peut être supprimée, puisqu'elle est sans influence sur les courants,

$$V_2 = \frac{1}{4\pi\varkappa}\left(\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz}\right).$$

Mais on a trouvé ci-dessus (n° 8)

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz} = -\int (u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu)\frac{d\sigma}{r};$$

on a donc aussi

$$V_2 = \frac{-1}{4\pi\varkappa}\int (u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu)\frac{d\sigma}{r}.$$

Le potentiel V_2 est ainsi exprimé au moyen des composantes du courant à son entrée et à sa sortie du conducteur.

Dans le cas où le courant entre et sort par deux points seulement, on a

$$V_2 = \frac{I}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell'}\right),$$

conformément à ce que nous avons trouvé (n° 2). Mais le raisonnement qui avait servi à établir cette formule pouvait inspirer des doutes. Nous voyons maintenant que les points A et A′ devaient être pris effectivement non à la surface du conducteur, mais à l'intérieur et à une distance infiniment petite, et qu'il fallait considérer autour de ces points non un hémisphère, mais une sphère infiniment petite.

Potentiel de l'électricité située à la surface d'un conducteur linéaire.

13. Supposons d'abord un conducteur linéaire qui soit rectiligne et un courant qui le parcourt depuis une distance infinie jusqu'à un point A.

Menons l'axe des z suivant le conducteur linéaire, mais dans le sens opposé au courant. Nous pouvons déterminer l'action du courant sur l'unité de fluide magnétique positif au point (x, y, z) par la formule de Laplace. Un point du courant étant désigné par $(0, 0, z')$, l'action d'un élément de courant dz' sur (x, y, z) a pour grandeur (Chap. II, n° 38)

$$\chi\, dz' = I\frac{dz'}{r^2}\sin(r, dz') = I\frac{p\, dz'}{[(z'-z)^2+p^2]^{\frac{3}{2}}},$$

en désignant par I l'intensité du courant linéaire et par p la distance du point (x, y, z) à l'axe des z; de plus, cette force est perpendiculaire au plan mené par cet axe et par ce point, et ces composantes suivant les trois axes des coordonnées sont

$$\chi\sin\alpha\, dz', \quad -\chi\cos\alpha\, dz', \quad 0,$$

α étant l'angle de p avec le plan des zx.

Désignons par c la distance du point A à l'origine des coordonnées

et par t la distance du point (x, y, z) à A; nous aurons

$$t = \sqrt{(c-z)^2 + p^2},$$
$$\int_c^\infty \chi\, dz' = \mathrm{I}\frac{1}{p}\left(+1 - \frac{c-z}{t}\right) = \mathrm{IT},$$

et les composantes de la force magnétique sur le point (x, y, z) seront (Chap. II, n° 39)

$$\mathrm{X}_2 = \mathrm{IT}\sin\alpha, \qquad \mathrm{Y}_2 = -\mathrm{IT}\cos\alpha, \qquad \mathrm{Z}_2 = 0.$$

14. Concevons ensuite que le fil apporte au point A son courant dans un conducteur H à trois dimensions. Alors, u_2, v_2, w_2 étant les parties des composantes du courant dans le conducteur H dues à l'action magnétique du fil, nous aurons

$$4\pi u_2 = \frac{d\mathrm{Z}_2}{dy} - \frac{d\mathrm{Y}_2}{dz}, \qquad 4\pi v_2 = \frac{d\mathrm{X}_2}{dz} - \frac{d\mathrm{Z}_2}{dx}, \qquad 4\pi w_2 = \frac{d\mathrm{Y}_2}{dx} - \frac{d\mathrm{X}_2}{dy}.$$

D'après cela, nous obtenons d'abord

$$4\pi u_2 = -\frac{d\mathrm{Y}_2}{dz} = \mathrm{I}\frac{d\mathrm{T}}{dz}\cos\alpha,$$
$$4\pi v_2 = \frac{d\mathrm{X}_2}{dz} = \mathrm{I}\frac{d\mathrm{T}}{dz}\sin\alpha$$

et

$$-\frac{d\mathrm{T}}{dz} = \frac{1}{p}\frac{d}{dz}\left(\frac{c-z}{t}\right) = -\frac{p}{t^3},$$

puis, comme on a $\cos\alpha = \frac{x}{p}$, $\sin\alpha = \frac{y}{p}$, il en résulte

$$4\pi u_2 = \mathrm{I}\frac{x}{t^3}, \qquad 4\pi v_2 = \mathrm{I}\frac{y}{t^3}$$

ou

$$u_2 = -\frac{\mathrm{I}}{4\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}\right), \qquad v_2 = -\frac{\mathrm{I}}{4\pi}\frac{d}{dy}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ensuite nous avons

$$w_2 = -\frac{\mathrm{I}}{4\pi}\left(\frac{d\mathrm{T}}{dp} + \frac{1}{p}\mathrm{T}\right) = -\frac{\mathrm{I}}{4\pi}\frac{c-z}{t^3} = -\frac{\mathrm{I}}{4\pi}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{t}\right).$$

Ainsi u_2, v_2, w_2 sont les composantes d'un courant qui proviennent d'un potentiel égal à $\frac{I}{4\pi\varkappa}\frac{1}{t}$, et ce résultat est évidemment indépendant des axes de coordonnées.

Nous pouvons facilement passer de ce théorème à celui qui concerne un courant linéaire de forme quelconque. D'abord, sur le courant rectiligne indéfini, prenons une longueur finie terminée aux deux points B et B′, le courant allant de B′ vers B; cette portion de courant pourra être considérée comme la différence entre deux courants rectilignes indéfinis terminés en B et B′; donc les composantes du courant qui en résultera dans le conducteur H seront

$$-\frac{I}{4\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t_B}-\frac{1}{t_{B'}}\right),\quad \ldots,$$

t_B et $t_{B'}$ étant les distances de B et B′ au point (x, y, z). Prenons ensuite un courant linéaire curviligne entrant au point A du conducteur H. Les composantes du courant dans H, dues à une longueur infiniment petite ds du fil, seront

$$\frac{I}{4\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{d\frac{1}{t}}{ds}\right)ds,\quad \ldots,$$

et celles qui sont dues au fil entier seront

$$\frac{I}{4\pi}\frac{d}{dx}\int\frac{d\frac{1}{t}}{ds}ds=-\frac{I}{4\pi}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t_1}\right),\qquad \ldots,$$

t et t_1 étant les distances du point (x, y, z) au point A et à l'autre extrémité du fil.

Ainsi, le potentiel de l'électricité située sur le fil est égal à

$$\frac{I}{4\pi\varkappa}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t_1}\right)$$

et se réduit à $\frac{I}{4\pi\varkappa}\frac{1}{t}$, si la seconde extrémité du fil est à une distance qu'on peut regarder comme infinie. Cette électricité se composera d'une double couche qui revêtira le fil. Le potentiel de l'électricité du

fil se substitue ainsi au potentiel du point A par lequel entre le courant dans le conducteur, potentiel qui avait été d'abord considéré au n° 2. On aurait à faire une remarque semblable pour le potentiel de l'électricité d'un fil qui emmène l'électricité du conducteur.

Conducteur dans lequel pénètrent les deux électrodes.

15. Au lieu que les extrémités A et A′ des deux électrodes viennent en contact avec la surface du conducteur, supposons qu'elles pénètrent dans le conducteur étant revêtues d'une substance isolatrice. Plusieurs savants ont admis, d'après le raisonnement du n° 2, que le potentiel de l'électricité du conducteur est donné encore par la formule de ce numéro

$$V = C\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + U.$$

Mais, d'après ce que nous avons vu, les deux extrémités A et A′ ne jouent qu'un rôle fictif, et il faut substituer à leur potentiel celui d'une double couche située sur les fils. Or il n'est pas évident que la double couche se comporte auprès de la substance isolatrice de la même manière qu'auprès de l'air. Concevons, par exemple, que la puissance de la double couche soit multipliée par une constante h sur la substance isolatrice. Désignons par t_1 et t'_1 les distances du point (x, y, z) aux points où les électrodes pénètrent dans le conducteur, et nous aurons pour les potentiels de l'électricité des deux fils les deux expressions

$$C\left(\frac{h}{t} - \frac{h}{t_1} + \frac{1}{t_1}\right), \quad -C\left(\frac{h}{t'} - \frac{h}{t'_1} + \frac{1}{t'_1}\right).$$

Courants permanents dans un conducteur sphérique.

16. Nous allons déterminer le mouvement permanent de l'électricité dans une sphère conductrice homogène, en supposant d'abord que les deux fils électrodes pénètrent dans la sphère, et que les parties des fils situées dans la sphère sont recouvertes d'une matière isolante. Tou-

tefois, pour simplifier, supposons que la quantité h du n° 15 soit égale à l'unité.

Prenons des coordonnées sphériques. Désignons par a le rayon de la sphère et par R, ψ, θ le rayon vecteur, la longitude et le complément de la latitude du point M où l'on prend le potentiel. Représentons aussi par (R', ψ', θ') et (R'', ψ'', θ'') les coordonnées des extrémités A et A' des électrodes. Nous avons, à une constante près,

$$V = C\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + U$$

et, le potentiel U de la double couche qui recouvre la sphère satisfaisant à $\Delta U = 0$, nous pouvons poser

$$U = \sum_{1}^{\infty} Y_n \frac{R^n}{a^n}.$$

Nous avons à exprimer la condition

$$\frac{dV}{dR} = 0 \qquad \text{pour} \qquad R = a; \tag{1}$$

pour cela, développons $\frac{1}{t}$ et $\frac{1}{t'}$ suivant les puissances de $\frac{1}{R}$, en regardant R comme plus grand que R' et R''; alors, si nous désignons par α et α' les angles formés par R avec R' et R'', nous aurons

$$\frac{1}{t} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{R'}{R}\cos\alpha + \frac{R'^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}\sum_{0}^{\infty} X_n \frac{R'^n}{R^n},$$

$$\frac{1}{t'} = \frac{1}{R}\left(1 - 2\frac{R''}{R}\cos\alpha' + \frac{R''^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{R}\sum_{0}^{\infty} X'_n \frac{R''^n}{R^n}.$$

Il en résulte

$$V = C\sum_{0}^{\infty}\left(X_n \frac{R'^n}{R^{n+1}} - X'_n \frac{R''^n}{R^{n+1}}\right) + \sum_{1}^{\infty} Y_n \frac{R^n}{a^n}.$$

Substituons cette expression dans l'équation (1) et égalons à zéro dans

le résultat séparément les fonctions sphériques de chaque ordre; nous aurons

$$Y_n = \frac{n+1}{na^{n+1}} C(X_n R'^n - X'_n R''^n),$$

et il en résulte

$$(2)\quad \begin{cases} \displaystyle\sum_1^\infty Y_n \frac{R^n}{a^n} = + \frac{C}{a}\left(\sum_1^\infty X_n \frac{R'^n}{a^{2n}} R^n - \sum_1^\infty X'_n \frac{R''^n}{a^{2n}} R^n\right) \\ \qquad\qquad + \dfrac{C}{a}\left(\displaystyle\sum_1^\infty \frac{1}{n} X_n \frac{R'^n}{a^{2n}} R^n - \sum_1^\infty \frac{1}{n} X'_n \frac{R''^n}{a^{2n}} R^n\right). \end{cases}$$

Soient (R_1, ψ', θ') et (R_2, ψ'', θ'') les coordonnées des points B et B' conjugués des points A et A', en sorte que $R_1 = \frac{a^2}{R'}$ et $R_2 = \frac{a^2}{R''}$; désignons aussi par T et T' les distances des points B et B' au point M; nous aurons

$$T = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2RR_1\cos\alpha}, \qquad T' = \sqrt{R^2 + R_2^2 - 2RR^2\cos\alpha'},$$

$$1 + \sum_1^\infty X_n \frac{R^n}{R_1^n} = \frac{R_1}{T}, \qquad 1 + \sum_1^\infty X'_n \frac{R^n}{R_2^n} = \frac{R_2}{T'},$$

ce qui donne la sommation des deux premières séries du second membre de (2). Occupons-nous ensuite de la troisième série

$$J = \sum_1^\infty \frac{1}{n} X_n \frac{R^n}{R_1^n};$$

nous aurons, en différentiant,

$$R\frac{dJ}{dR} = \sum_1^\infty X_n \frac{R^n}{R^1} = \frac{R_1}{T} - 1$$

ou

$$dJ = \frac{R_1 dR}{R\sqrt{R^2 - 2RR_1\cos\alpha + R_1^2}} - \frac{dR}{R}$$

et, en intégrant,

$$= -\log(R_1 - R\cos\alpha + T) + A$$

où A est une constante. Or J s'annule pour R = o, ce qui détermine A et la valeur de J devient

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} X_n \frac{R^n}{R_1^n} = \log \frac{2R_1}{R_1 - R\cos\alpha + T};$$

on a de même

$$\sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} X'_n \frac{R^n}{R_2^n} = \log \frac{2R_2}{R_2 - R\cos\alpha' + T'}.$$

En substituant dans (2), on obtient

$$\sum_{1}^{\infty} Y_n \frac{R^n}{a^n} = \frac{C}{a}\left(\frac{R_1}{T} - \frac{R_2}{T'}\right) + \frac{C}{a} \log \frac{R_1(R_2 - R\cos\alpha' + T')}{R_2(R_1 - R\cos\alpha + T)},$$

et enfin

$$V = C\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + \frac{C}{a}\left(\frac{R_1}{T} - \frac{R_2}{T'}\right) + \frac{C}{a} \log \frac{R_1(R_2 - R\cos\alpha' + T')}{R_2(R_1 - R\cos\alpha + T)}.$$

Cette formule a été donnée par M. Helmholtz (t. I de ses Mémoires, p. 496).

Théorèmes sur les fonctions sphériques.

17. Nous allons démontrer des propriétés des fonctions sphériques dont nous aurons besoin dans ce qui va suivre. Posons

$$\Theta_{n,l} = \sin^l\alpha \left[\cos^{n-l}\alpha - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-l-2}\alpha + \frac{(n-l)(n-l-1)(n-l-2)(n-l-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-l-4}\alpha - \dots\right].$$

La fonction sphérique $R^n\Theta_{n,l}\cos l\psi$, qui est d'ordre n, satisfait à l'équation $\Delta U = o$, et il en est de même de ses dérivées par rapport à x, y, z qui sont, par suite, des fonctions sphériques d'ordre $n-1$. Bornons-nous à considérer la fonction sphérique d'ordre n

$$p = R^n\Theta_{n,0};$$

nous aurons

$$\frac{dp}{dx} = \left(\frac{dp}{d\mathrm{R}}\sin\alpha + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{dp}{d\alpha}\cos\alpha\right)\cos\psi$$
$$= \mathrm{R}^{n-1}\left(n\Theta_{n,0}\sin\alpha + \frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\cos\alpha\right)\cos\psi.$$

Cette expression est une fonction sphérique de l'ordre $n-1$, qui peut donc s'écrire $\mathrm{HR}^{n-1}\Theta_{n-1,1}\cos\psi$, H étant une constante; on a donc

$$n\Theta_{n,0}\sin\alpha + \frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\cos\alpha = \mathrm{H}\Theta_{n-1,1};$$

on déterminera la quantité H en calculant le terme en $\cos^{n-2}\alpha\sin\alpha$ du premier membre, qui est celui du degré le plus élevé, et l'on aura définitivement

$$(1) \qquad n\Theta_{n,0}\sin\alpha + \frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\cos\alpha = -\frac{n(n-1)}{2n-1}\Theta_{n-1,1}.$$

En formant $\frac{dp}{dz}$ et raisonnant de la même manière, on trouve

$$(2) \qquad n\Theta_{n,0}\cos\alpha - \frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\sin\alpha = \frac{n^2}{2n-1}\Theta_{n-1,0}.$$

En second lieu, considérons la fonction sphérique

$$q = \mathrm{R}^{-n-1}\Theta_{n,0};$$

elle satisfait à $\Delta q = 0$; il en est de même de sa dérivée $\frac{dq}{dx}$, et, en raisonnant comme ci-dessus, on obtient

$$(3) \qquad -(n+1)\Theta_{n,0}\sin\alpha + \frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\cos\alpha = -(2n+1)\Theta_{n+1,1}.$$

Enfin, en considérant

$$s = \mathrm{R}^{-n-1}\Theta_{n,1},$$

puis formant $\frac{ds}{dz}$ et procédant encore de la même manière, on trouve

$$(4) \qquad (n+1)\Theta_{n,1}\cos\alpha + \frac{d\Theta_{n,1}}{d\alpha}\sin\alpha = (2n+1)\Theta_{n+1,1}.$$

Sphère traversée par un courant permanent qui entre et sort par deux points situés à l'extrémité d'un diamètre.

18. Nous allons examiner ce cas particulier avec plus de développement.

Dans les formules précédentes, supposons que les deux points électrodes A et A′ soient situés à la surface de la sphère, nous aurons, à l'intérieur de ce corps,

$$\frac{1}{l} - \frac{1}{l'} = \sum_{1}^{\infty} (X_n - X'_n) \frac{R^n}{a^{n+1}},$$

$$\sum_{1}^{\infty} Y_n \frac{R^n}{a^n} = C \sum_{1}^{\infty} \frac{n+1}{n} (X_n - X'_n) \frac{R^n}{a^{n+1}},$$

et par suite

$$V = C \sum_{1}^{\infty} \frac{2n+1}{n} (X_n - X'_n) \frac{R^n}{a^{n+1}}.$$

Prenons ensuite les deux points A et A′ à l'extrémité de l'axe polaire; nous aurons

$$\alpha' = \pi - \alpha,$$

$$X_n = t_n \left[\cos^n \alpha - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} \cos^{n-2} \alpha + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2.4(2n-1)(2n-3)} \cos^{n-4} \alpha - \dots \right]$$

avec

$$t_n = \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{1.2 \dots n}$$

et

$$X'_n = \pm X_n,$$

suivant que n est pair ou impair. Par suite, V se réduit à

$$2C \sum_{2p+1} \frac{2n+1}{n} X_n \frac{R^n}{a^{n+1}},$$

le signe $\sum$ se rapportant à toutes les valeurs impaires de n.

19. *Calcul* de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ *à l'intérieur de la sphère.* — Les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ sont définies par les formules (n° 7)

$$\mathfrak{F}=\int\frac{u}{r}\,d\varpi,\qquad \mathfrak{G}=\int\frac{v}{r}\,d\varpi,\qquad \mathfrak{H}=\int\frac{w}{r}\,d\varpi.$$

Désignons par V′ ce que devient V, quand on y remplace x, y, z par x', y', z', coordonnées de $d\varpi$; nous aurons

$$u=-\varkappa\frac{dV'}{dx'},\qquad v=-\varkappa\frac{dV'}{dy'},\qquad w=-\varkappa\frac{dV'}{dz'};$$

par suite,

$$(a)\qquad \mathfrak{F}=-\varkappa\int\frac{dV'}{dx'}\,\frac{d\varpi}{r},\qquad \mathfrak{G}=-\varkappa\int\frac{dV'}{dy'}\,\frac{d\varpi}{r},\qquad \mathfrak{H}=-\varkappa\int\frac{dV'}{dz'}\,\frac{d\varpi}{r}.$$

Soient (R',ψ',α') les coordonnées sphériques du point (x',y',z'); on aura

$$V'=2C\sum_{2p+1}\frac{2n+1}{n}X'_n\frac{R'^n}{a^{n+1}},$$

X'_n étant ce que devient X_n, quand on y remplace α par α'. Puis on en tire

$$\frac{dV'}{dx'}=\left(\frac{dV'}{dR'}\sin\alpha'+\frac{1}{R'}\frac{dV'}{d\alpha'}\cos\alpha'\right)\cos\psi'$$
$$=2C\sum\frac{2n+1}{n}\frac{R'^{n-1}}{a^{n+1}}\left(nX'_n\sin\alpha'+\frac{dX'_n}{d\alpha'}\cos\alpha'\right)\cos\psi'.$$

Ensuite on a

$$X_n=t_n\Theta_{n,0},$$
$$n\Theta_{n,0}\sin\alpha+\frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\cos\alpha=-\frac{n(n-1)}{2n-1}\Theta_{n-1,1},$$

et il en résulte

$$\frac{dV'}{dx'}=-2C\sum\frac{(2n+1)(n-1)}{2n-1}t_n\frac{R'^{n-1}}{a^{n+1}}\Theta_{n-1,1}\cos\psi'.$$

Par le point (x,y,z) menons une sphère concentrique à la sphère donnée et qui divise cette dernière en deux parties : l'une, pour laquelle R′ est $<$ R; l'autre, pour laquelle R′ est $>$ R; nous diviserons

les intégrales (a) en deux parties correspondantes et nous aurons

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R'} \sum_{q=0}^{\infty} \mathfrak{X}_q \frac{R^q}{R'^q} \qquad \text{si } R' > R,$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_{q=0}^{\infty} \mathfrak{X}_q \frac{R'^q}{R_q} \qquad \text{si } R' < R,$$

$\mathfrak{X}_q$ désignant ce que devient X_q quand on y remplace $\cos\alpha$ par

$$\cos G = \cos\alpha \cos\alpha' + \sin\alpha \sin\alpha' \cos(\psi - \psi').$$

Posons

$$d\varpi = R'^2 \, dR' \sin\alpha' \, d\alpha' \, d\psi',$$

et calculons d'abord la partie de $\int \frac{1}{r} \frac{dV'}{dx'} d\varpi$ qui se rapporte à des valeurs de R′ comprises entre o et R; nous aurons pour sa valeur, après avoir effectué l'intégration par rapport à R′,

$$-2C \sum \frac{(n-1)(2n+1)}{2n-1} t_n \frac{R^{n+1}}{(n+q+2)a^{n+1}} \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta'_{n-1,1} \cos\psi' \mathfrak{X}_q \sin\alpha' \, d\alpha' \, d\psi'.$$

Or, si l'on désigne par Y_n une fonction sphérique d'ordre n par rapport aux variables α, ψ et par Y'_n ce que devient Y_n quand on y remplace α et ψ par α' et ψ', on aura (*Cours de Phys. math.*, Chap. VI, n° 84)

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} Y'_n \mathfrak{X}_q \sin\alpha' \, d\alpha' \, d\psi' = \frac{4\pi}{2n+1} Y_n \qquad \text{si } q = n,$$
$$= 0 \qquad \text{sinon};$$

or $\Theta'_{n-1,1} \cos\psi'$ est une fonction sphérique d'ordre $n-1$; on a donc

$$\int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} \Theta'_{n-1,1} \cos\psi' \mathfrak{X}_{n-1} \sin\alpha' \, d\alpha' \, d\psi' = \frac{4\pi}{2n-1} \Theta_{n-1,1} \cos\psi,$$

et l'on supprimera, dans la série précédente, tous les termes pour lesquels q est différent de $n-1$. D'après cela, en ne considérant que les

éléments de l'intégrale, pour lesquels R′ est $< R$, on a

$$\int \frac{1}{r}\frac{dV'}{dx'}\,d\varpi = -8\pi C \sum_n \frac{n-1}{(2n-1)^2}\, t_n \frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\,\Theta_{n-1,1}\cos\psi.$$

Pour calculer la même intégrale depuis $R' = R$ jusqu'à $R' = a$, on emploiera la première expression de $\frac{1}{r}$, et, par un calcul semblable, on trouvera

$$\int \frac{1}{r}\frac{dV'}{dx'}\,d\varpi = -4\pi C \sum_n \frac{(n-1)(2n+1)}{(2n-1)^2}\, t_n \left(\frac{R^{n-1}}{a^{n-1}} - \frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\right)\Theta_{n-1,1}\cos\psi.$$

Ajoutons les deux dernières formules et nous aurons, pour l'intégrale relative à toute la sphère,

$$\int \frac{1}{r}\frac{dV'}{dx'}\,d\varpi = -4\pi C \sum_n \frac{(n-1)(2n+1)}{(2n-1)^2}\, t_n \frac{R^{n-1}}{a^{n-1}}\,\Theta_{n-1,1}\cos\psi$$
$$+ 4\pi C \sum_n \frac{n-1}{2n-1}\, t_n \frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\,\Theta_{n-1,1}\cos\psi,$$

le signe $\sum$ se rapportant à $n = 1, 3, 5, \ldots$ Multiplions par $-x$ et changeons n en $n+1$ sous le signe de sommation; nous aurons, en remplaçant $4\pi x C$ par I,

$$\mathcal{F} = I \sum_{2p} \frac{n(2n+3)}{(2n+1)^2}\, t_{n+1} \frac{R^n}{a^n}\,\Theta_{n,1}\cos\psi - I \sum_{2p} \frac{n}{2n+1}\, t_{n+1} \frac{R^{n+2}}{a^{n+2}}\,\Theta_{n,1}\cos\psi,$$

où $n = 0, 2, 4, 6, \ldots$. La dernière série peut être sommée et la seconde partie de $\mathcal{F}$ peut s'exprimer sous forme finie par l'expression

$$-\frac{I}{2}\frac{R}{a\sin\alpha}\left(\frac{a + R\cos\alpha}{t'} - \frac{a - R\cos\alpha}{t}\right)\cos\psi,$$

t et t' étant les distances du point considéré aux points A et A′.

L'expression de $\mathcal{G}$ se déduit de celle de $\mathcal{F}$, en changeant simplement $\cos\psi$ en $\sin\psi$.

20. Ensuite calculons ξ; nous avons

$$\frac{dV'}{dz'} = \frac{dV'}{dR'}\cos\alpha' - \frac{1}{R'}\frac{dV'}{d\alpha'}\sin\alpha'$$
$$= 2C\sum_{2p+1}\frac{2n+1}{n}\frac{R'^{n-1}}{a^{n+1}}\left(nX'_n\cos\alpha' - \frac{dX'_n}{d\alpha'}\sin\alpha'\right),$$

et d'autre part

$$nX_n\cos\alpha - \frac{dX_n}{d\alpha}\sin\alpha = t_n\left(n\Theta_{n,0}\cos\alpha - \frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\sin\alpha\right) = \frac{n^2}{2n-1}t_n\Theta_{n-1,0}.$$

La partie de $\int\frac{1}{r}\frac{dV'}{dz'}d\varpi$, pour laquelle R' est $<$ R, a pour valeur

$$2C\sum_{n,q}\frac{n(2n+1)}{2n-1}t_n\frac{1}{n+q+2}\frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\int\int\Theta'_{n-1,0}\mathfrak{X}_q\sin\alpha'\,d\alpha'\,d\psi',$$

et, en remplaçant l'intégrale par sa valeur, d'après ce qui a été dit ci-dessus, on a

$$\int\frac{1}{r}\frac{dV'}{dz'}d\varpi = 8\pi C\sum_n\frac{nt_n}{(2n-1)^2}\Theta_{n-1,0}\frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}.$$

La partie de la même intégrale, pour laquelle R' variera depuis R jusqu'à a, aura pour valeur

$$\int\frac{1}{r}\frac{dV'}{dz'}d\varpi = 4\pi C\sum_n\frac{n(2n+1)}{(2n-1)^2}t_n\left(\frac{R^{n-1}}{a^{n-1}} - \frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\right)\Theta_{n-1,0}.$$

En ajoutant ces deux expressions, on a pour la même intégrale étendue à tout le volume de la sphère

$$\int\frac{1}{r}\frac{dV'}{dz'}d\varpi = 4\pi C\sum\frac{n(2n+1)}{(2n-1)^2}t_n\frac{R^{n-1}}{a^{n-1}}\Theta_{n-1,0}$$
$$- 4\pi C\sum\frac{n}{2n-1}t_n\frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\Theta_{n-1,0},$$

où n est susceptible des valeurs 1, 3, 5, ...

Changeons n en $n+1$ et nous trouvons

$$\mathcal{G} = -\mathrm{I}\sum_{2p}\frac{2n+3}{2n+1}t_n\frac{\mathrm{R}^n}{a^n}\Theta_{n,0} + \mathrm{I}\sum_{2p}t_n\frac{\mathrm{R}^{n+2}}{a^{n+2}}\Theta_{n,0},$$

où n est susceptible des valeurs 0, 2, 4, ...

On reconnaît facilement que la seconde partie de $\mathcal{G}$ a pour valeur

$$\frac{1}{2}\mathrm{I}\frac{\mathrm{R}^2}{a}\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{t'}\right).$$

On peut vérifier que les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ satisfont à l'équation du n° 8

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx}+\frac{d\mathcal{G}}{dy}+\frac{d\mathcal{G}}{dz}=\mathrm{I}\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right).$$

21. *Calcul de* $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ *pour un point extérieur.* — Désignons par $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}'$ ce que deviennent $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$ quand le point (R, ψ, θ) est extérieur à la sphère. Dans le calcul qui a donné la première partie de $\mathcal{F}$ pour un point intérieur, remplaçons l'intégration par rapport à R′ prise de 0 à R par une intégration de 0 à a et nous aurons

$$\mathcal{F}' = 2\mathrm{I}\sum_{2p}\frac{n}{(2n+1)^2}t_{n+1}\frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+1}}\Theta_{n,1}\cos\psi,$$

où $n = 0, 2, 4, \ldots$. On déduit $\mathcal{G}'$ de $\mathcal{F}'$, en changeant $\cos\psi$ en $\sin\psi$; ce qui donne

$$\mathcal{G}' = 2\mathrm{I}\sum_{2p}\frac{n}{(2n+1)^2}t_{n+1}\frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+1}}\Theta_{n,1}\sin\psi.$$

De même, on obtiendra pour $\mathcal{G}'$

$$\mathcal{G}' = -2\mathrm{I}\sum_{2p}\frac{1}{2n+1}t_n\frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+1}}\Theta_{n,0}.$$

On peut vérifier que les expressions trouvées pour $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{G}'$ satisfont à la surface de la sphère aux conditions

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}', \quad \mathcal{G}=\mathcal{G}', \quad \mathcal{G}=\mathcal{G}',$$

$$\frac{d\mathcal{F}}{d\mathrm{R}}=\frac{d\mathcal{F}'}{d\mathrm{R}}, \quad \frac{d\mathcal{G}}{d\mathrm{R}}=\frac{d\mathcal{G}'}{d\mathrm{R}}, \quad \frac{d\mathcal{G}}{d\mathrm{R}}=\frac{d\mathcal{G}'}{d\mathrm{R}},$$

qu'on reconnaît *a priori;* car $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$, par exemple, représentent le potentiel d'une masse dont la densité u est partout finie, excepté aux points électrodes A et A'; ce potentiel est donc fini et continu, ainsi que ses dérivées du premier ordre, excepté en ces deux points.

On peut encore vérifier que l'on a l'équation

$$\frac{d\mathcal{F}'}{dx} + \frac{d\mathcal{G}'}{dy} + \frac{d\mathcal{H}'}{dz} = \mathrm{I}\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right).$$

22. *Calcul des composantes de la force magnétique.* — Les composantes de cette force sur un point extérieur sont

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathcal{H}'}{dy} - \frac{d\mathcal{G}'}{dz}, \qquad \mathrm{Y} = \frac{d\mathcal{F}'}{dz} - \frac{d\mathcal{H}'}{dx}, \qquad \mathrm{Z} = \frac{d\mathcal{G}'}{dx} - \frac{d\mathcal{F}'}{dy}.$$

Les valeurs de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$ peuvent s'écrire

$$\mathcal{F}' = \mathrm{L}\cos\psi, \qquad \mathcal{G}' = \mathrm{L}\sin\psi,$$

L étant indépendant de ψ, et l'on en conclut

$$\mathrm{Z} = 0. \tag{1}$$

Calculons ensuite X. Les expressions de $\mathcal{H}'$ et $\mathcal{G}'$ peuvent s'écrire

$$\mathcal{H}' = \sum_{2q} k_n \frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+1}} \Theta_{n,0}, \qquad \mathcal{G}' = \sum_{2q} p_n \frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+1}} \Theta_{n,1} \sin\psi,$$

en posant

$$k_n = -2\mathrm{I}\frac{t_n}{2n+1}, \qquad p_n = 2\mathrm{I}\frac{n}{(2n+1)^2} t_{n+1}.$$

On aura ensuite

$$\frac{d\mathcal{H}'}{dy} = \sum k_n \frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+2}} \left[-(n+1)\Theta_{n,0}\sin\alpha + \frac{d\Theta_{n,0}}{d\alpha}\cos\alpha\right]\sin\psi,$$

$$\frac{d\mathcal{G}'}{dz} = \sum p^n \frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+2}} \left[-(n+1)\Theta_{n,1}\cos\alpha - \frac{d\Theta_{n,1}}{d\alpha}\sin\alpha\right]\sin\psi,$$

ou (n° 17)

$$\frac{d\mathcal{H}'}{dy} = -\sum (2n+1) k_n \frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+2}} \Theta_{n+1,1} \sin\psi,$$

$$\frac{d\mathcal{G}'}{dz} = -\sum (2n+1) p_n \frac{a^{n+1}}{\mathrm{R}^{n+2}} \Theta_{n+1,1} \sin\psi.$$

On en conclut

$$X = 2I \sum_{2q} t_{n+1} \frac{a^{n+1}}{R^{n+2}} \Theta_{n+1,1} \sin\psi$$

ou

$$X = 2I \sum_{2q+1} t_n \frac{a^n}{R^{n+1}} \Theta_{n,1} \sin\psi. \tag{2}$$

On trouve de la même manière

$$Y = -2I \sum_{2q+1} t_n \frac{a^n}{R^{n+1}} \Theta_{n,1} \cos\psi. \tag{3}$$

Nous avons vu (n° 9) que les composantes de la force magnétique sont assimilables à des potentiels de couches situées sur la surface de la sphère. Donc, des valeurs (1), (2), (3) de ces composantes à l'extérieur, on peut conclure immédiatement leurs valeurs à l'intérieur qui sont

$$Z = 0, \qquad X = 2I \sum_{2q+1} t_n \frac{R^n}{a^{n+1}} \Theta_{n,1} \sin\psi,$$

$$Y = -2I \sum_{2q+1} t_n \frac{R^n}{a^{n+1}} \Theta_{n,1} \cos\psi.$$

23. *Composantes u, v, w du courant.* — Les composantes u, v, w du courant sont données par les formules

$$u = -\varkappa \frac{dV}{dx}, \qquad v = -\varkappa \frac{dV}{dy}, \qquad w = -\varkappa \frac{dV}{dz}.$$

Or, d'après ce que nous avons trouvé (n°s 19 et 20), si l'on pose

$$\sum_{2p} \frac{n(2n+3)}{n+1} t_n \frac{R^n}{a^{n+2}} \Theta_{n,1} = P,$$

on a

$$\frac{dV}{dx} = -2CP\cos\psi, \qquad \frac{dV}{dy} = -2CP\sin\psi,$$

$$\frac{dV}{dz} = 2C \sum_{2p+1} \frac{n(2n+1)}{2n-1} t_n \frac{R^{n-1}}{a^{n+1}} \Theta_{n-1,0}$$

et nous en concluons

$$u = \frac{I}{2\pi} P \cos\psi, \qquad v = \frac{I}{2\pi} P \sin\psi,$$

$$w = -\frac{I}{2\pi} \sum_{2p} (2n+3) t_n \frac{R^n}{a^{n+2}} \Theta_{n,0}.$$

Ces quantités peuvent aussi être mises sous forme finie, en différentiant par rapport à x, y, z l'expression

$$V = 2C\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + \frac{C}{a} \log \frac{a + R\cos\alpha + t'}{a - R\cos\alpha + t},$$

qu'on déduit de la formule du n° 16.

Force magnétique produite par les électrodes fixées à la sphère.

24. Les courants de la sphère sont amenés et emportés par deux fils qui sont fixés aux points A et A′ situés aux extrémités de l'axe polaire. Dans ce qui suit, nous supposerons de plus que ces deux fils sont en ligne droite, dirigés suivant l'axe polaire et assez longs pour pouvoir être considérés comme infinis. Prenons, comme précédemment, l'axe des z suivant l'axe polaire; le courant est dirigé en sens contraire de cet axe.

D'après ce que nous avons vu (n° 13), les composantes de l'action magnétique des deux fils seront données par les formules

$$(\alpha) \qquad \mathfrak{X} = IT\sin\psi, \qquad \mathfrak{Y} = -IT\cos\psi, \qquad \mathfrak{Z} = 0,$$

où l'on prend

$$T = \int_a^\infty \frac{p\,dz'}{[(z-z')^2 + p^2]^{\frac{3}{2}}} + \int_{-\infty}^{-a} \frac{p\,dz'}{[(z-z')^2 + p^2]^{\frac{3}{2}}},$$

et en désignant par ψ l'angle de la perpendiculaire p à l'axe des z avec le plan des zx. On a, d'après cela,

$$T = \frac{1}{p}(2 - \Psi),$$

en posant

$$\Psi = \frac{a-z}{[(a-z)^2+p^2]^{\frac{1}{2}}} + \frac{a+z}{[(a+z)^2+p^2]^{\frac{1}{2}}}.$$

En employant les coordonnées sphériques comme ci-dessus, on a

$$p = R\sin\alpha, \qquad z = R\cos\alpha,$$

$$\Psi = \frac{a-R\cos\alpha}{(a^2-2aR\cos\alpha+R^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a+R\cos\alpha}{(a^2+2aR\cos\alpha+R^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

25. Distinguons ensuite le cas où le point (x, y, z) est extérieur à la sphère et celui où il est intérieur.

Si le point (x, y, z) est extérieur à la sphère, employons le développement

$$\left(1-2\frac{a}{R}\cos\alpha+\frac{a^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1\frac{a}{R} + X_2\frac{a^2}{R^2} + \ldots,$$

et nous aurons

$$T = \frac{1}{R\sin\alpha}(2-\Psi) = -\frac{2}{R\sin\alpha}\left[-1+(1-X_1\cos\alpha)\frac{a}{R}+(X_2-X_3\cos\alpha)\frac{a^3}{R^3} + (X_4-X_5\cos\alpha)\frac{a^5}{R^5}+\ldots\right].$$

On reconnaît facilement que

$$(a) \qquad \frac{X_{2n}-X_{2n+1}\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ne devient pas infini pour $\alpha = 0$. Puis remarquons que $\mathfrak{X}$ satisfait à l'équation $\Delta\mathfrak{X} = 0$ (n° 9); il en est donc de même de $T\sin\psi$, et, en raisonnant comme au n° 17, on en conclut que la fonction (a) est égale à $\Theta_{2n+1,1}$ multiplié par une constante qu'on déterminera facilement, et l'on aura enfin

$$\frac{X_{2n}-X_{2n+1}\cos\alpha}{\sin\alpha} = t_{2n+1}\Theta_{2n+1,1}.$$

Ainsi on a la formule suivante

$$(b) \qquad T = \frac{2}{R\sin\alpha} - 2\left(\Theta_{1,1}\frac{a}{R^2} + t_3\Theta_{3,1}\frac{a^3}{R^4} + t_5\Theta_{5,1}\frac{a^5}{R^6}+\ldots\right),$$

dont le premier terme devient infini pour $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, c'est-à-dire sur les deux fils.

Supposons ensuite que le point (x, y, z) soit intérieur à la sphère. En employant le développement

$$\left(1 - 2\frac{R}{a}\cos\alpha + \frac{R^2}{a^2}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + X_1\frac{R}{a} + X_2\frac{R^2}{a^2} + \ldots,$$

on trouve

$$T = -\frac{2}{\sin\alpha}\left[(X_2 - X_1\cos\alpha)\frac{R}{a^2} + (X_4 - X_3\cos\alpha)\frac{R^3}{a^4} + \ldots\right].$$

On démontrera encore facilement qu'on a

$$\frac{X_n - X_{n-1}\cos\alpha}{\sin\alpha} = -\frac{n-1}{n}t_{n-1}\Theta_{n-1,1},$$

et, par suite, on obtiendra

$$(c) \qquad T = \Theta_{1,1}\frac{R}{a^2} + \tfrac{3}{2}t_2\Theta_{2,1}\frac{R^3}{a^4} + \tfrac{5}{2}t_3\Theta_{3,1}\frac{R^5}{a^6} + \ldots.$$

Suivant que le point sera extérieur ou intérieur à la sphère, on devra remplacer dans les formules (α) T par (b) ou (c).

26. Si l'on désigne par u_2, v_2, w_2, à l'intérieur de la sphère, les composantes du courant qui provient de l'action magnétique des fils, on a

$$4\pi u_2 = \frac{d\mathfrak{Z}}{dy} - \frac{d\mathfrak{Y}}{dz}, \qquad 4\pi v_2 = \frac{d\mathfrak{X}}{dz} - \frac{d\mathfrak{Z}}{dx}, \qquad 4\pi w_2 = \frac{d\mathfrak{Y}}{dx} - \frac{d\mathfrak{X}}{dy}.$$

En effectuant le calcul, on trouvera

$$u_2 = \frac{I}{2\pi}\cos\psi\sum_{2p} nt_n\Theta_{n,1}\frac{R^n}{a^{n+1}},$$

$$v_2 = \frac{I}{2\pi}\sin\psi\sum_{2p} nt_n\Theta_{n,1}\frac{R^n}{a^{n+1}},$$

$$w_2 = -\frac{I}{2\pi}\sum_{2v}(n+1)t_n\Theta_{n,0}\frac{R^n}{a^{n+2}}.$$

Ces expressions ont été obtenues en prenant les fils rectilignes et dirigés suivant l'axe des z. Mais, d'après ce que nous avons vu (n° 14), les valeurs de u_2, v_2, w_2 restent les mêmes, quelle que soit la forme des fils, pourvu seulement que leurs secondes extrémités soient très éloignées de la sphère.

Désignons par u_1, v_1, w_1 les composantes du courant qui provient de la double couche située à la surface de la sphère; en les ajoutant respectivement à u_2, v_2, w_2, on obtiendra les composantes u, v, w du courant total.

Force magnétique totale de la sphère et des fils.

27. Supposons d'abord que le point en lequel on cherche l'action magnétique soit à l'extérieur.

La force magnétique produite par la sphère a pour composantes

$$X = IM\sin\psi, \qquad Y = -IM\cos\psi, \qquad Z = 0,$$

en posant

$$M = \frac{2}{R}\sum_{2p+1} t_n \frac{a^n}{R^n}\Theta_{n,1},$$

et celle qui est produite par les fils a pour composantes

$$\mathfrak{X} = IT\sin\psi, \qquad \mathfrak{Y} = -IT\cos\psi, \qquad \mathfrak{Z} = 0,$$

en posant

$$T = \frac{2}{R\sin\alpha} - M.$$

On a donc, pour les composantes de la force magnétique totale,

$$X + \mathfrak{X} = \frac{2I}{R\sin\alpha}\sin\psi, \qquad Y + \mathfrak{Y} = -\frac{2I}{R\sin\alpha}\cos\psi, \qquad Z + \mathfrak{Z} = 0.$$

Ainsi, la force magnétique à l'extérieur de la sphère est la même que si la sphère était supprimée et que le fil se continuât à travers la sphère. En d'autres termes, l'action magnétique de la sphère à l'extérieur est égale à celle d'un fil droit traversé par le courant I et qui joindrait les deux points A et A′.

Occupons-nous ensuite de l'action magnétique à l'intérieur de la sphère.

La partie de cette force qui est produite par la sphère a pour composantes

$$X = IM' \sin\psi, \qquad Y = -IM' \cos\psi, \qquad Z = 0,$$

en posant

$$M' = \frac{2}{a} \sum_{2p+1} t_n \frac{R^n}{a^n} \Theta_{n,1},$$

et la partie qui provient des fils a pour composantes

$$\mathfrak{X} = IT \sin\psi, \qquad \mathfrak{Y} = -IT \cos\psi, \qquad \mathfrak{Z} = 0,$$

en posant

$$T = -\frac{1}{R \sin\alpha}\left(\frac{a - R\cos\alpha}{t} + \frac{a + R\cos\alpha}{t'} - 2\right).$$

Sommons la série M'. Nous avons d'abord

$$M = -T + \frac{2}{R\sin\alpha} = \frac{1}{R\sin\alpha}\left[\frac{a - R\cos\alpha}{(a^2 + R^2 - 2aR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}} + \frac{a + R\cos\alpha}{(a^2 + R^2 + 2aR\cos\alpha)^{\frac{1}{2}}}\right]$$

et, en permutant les lettres a et R, nous obtenons

$$M' = \frac{1}{a\sin\alpha}\left(\frac{R - a\cos\alpha}{t} + \frac{R + a\cos\alpha}{t'}\right).$$

Détermination des lignes de courant dans la sphère.

28. Les lignes de courant sont données par les deux équations

$$\psi = \text{const.}, \qquad \frac{dV}{dz}dp - \frac{dV}{dp}dz = 0, \tag{1}$$

en désignant par p la distance au diamètre qui joint les points électrodes A et A'. Or l'équation $\Delta V = 0$ peut s'écrire

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \frac{d^2V}{dp^2} + \frac{1}{p}\frac{dV}{dp} = 0.$$

ou

$$\frac{d}{dz}\left(p\frac{dV}{dz}\right)=-\frac{d}{dp}\left(p\frac{dV}{dp}\right);$$

donc, si l'on multiplie la seconde équation (1) par p, on aura l'équation

$$p\frac{dV}{dz}\,dp-p\frac{dV}{dp}\,dz=0, \tag{2}$$

dont le premier membre sera une différentielle exacte.

Nous avons trouvé précédemment

$$\frac{dV}{dz}=2C\sum_{2q}(2n+3)t_n\frac{R^n}{a^{n+2}}\Theta_{n,0};$$

nous avons ensuite

$$p\frac{dV}{dp}=x\frac{dV}{dx}+y\frac{dV}{dy}.$$

Faisons

$$p=R\sin\alpha,\qquad x=R\sin\alpha\cos\psi,\qquad y=R\sin\alpha\sin\psi,$$

et remplaçons $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$ par les valeurs obtenues précédemment : nous obtiendrons

$$p\frac{dV}{dp}=-2C\sum_{2q}\frac{n(2n+3)}{n+1}t_n\frac{R^{n+1}}{a^{n+2}}\Theta_{n,1}\sin\alpha.$$

En remplaçant aussi dp et dz dans (2), nous aurons l'équation

$$\begin{aligned}0=&\sum_{2q}(2n+3)t_n\left(\Theta_{n,0}\sin\alpha+\frac{n}{n+1}\Theta_{n,1}\cos\alpha\right)\sin\alpha\frac{R^{n+1}}{a^{n+2}}dR\\&+\sum_{2q}(2n+3)t_n\left(\Theta_{n,0}\cos\alpha-\frac{n}{n+1}\Theta_{n,1}\sin\alpha\right)\sin\alpha\frac{R^{n+2}}{a^{n+2}}d\alpha,\end{aligned}$$

dont le second membre est une différentielle exacte. En intégrant, nous obtenons l'équation

$$\sum_{2q}\frac{2n+3}{n+2}t_n\frac{R^{n+2}}{a^{n+2}}\left(\Theta_{n,0}\sin\alpha+\frac{n}{n+1}\Theta_{n,1}\cos\alpha\right)\sin\alpha=\text{const.}$$

Ensuite on vérifie facilement qu'on a

$$\Theta_{n,0}\sin\alpha+\frac{n}{n+1}\Theta_{n,1}\cos\alpha=\frac{2n+1}{n+1}\Theta_{n+1,1},$$

et l'équation des lignes de courant devient

$$\sum_{2q}\frac{(2n+1)(2n+3)}{(n+1)(n+2)}t_n\frac{R^{n+2}}{a^{n+2}}\Theta_{n+1,1}\sin\alpha=\text{const.}$$

ou

$$\sum_{2q}t_{n+2}\frac{R^{n+2}}{a^{n+2}}\Theta_{n+1,1}\sin\alpha=\text{const.}$$

ou encore

$$\sum_{2q+1}t_{n+1}\frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\Theta_{n,1}\sin\alpha=\text{const.}$$

D'autre part, on a vu (n° 27) qu'on a

$$Q=\sum_{2q+1}t_n\frac{R^n}{a^n}\Theta_{n,1}\sin\alpha=\frac{R-a\cos\alpha}{2t}+\frac{R+a\cos\alpha}{2t'};$$

on a aussi

$$\sum_{2q+1}t_{n+1}\frac{R^{n+1}}{a^{n+1}}\Theta_{n,1}\sin\alpha=\frac{2}{a}QR-\frac{1}{a}\int_0^R Q\,dR.$$

Donc l'équation des lignes de courant est enfin

$$\frac{R-a\cos\alpha}{t}+\frac{R+a\cos\alpha}{t'}-\frac{1}{2R}(t+t')=\text{const.}$$

Mouvement permanent de l'électricité dans un ellipsoïde planétaire.

29. L'ellipsoïde étant supposé conducteur et homogène, nous représentons, comme précédemment, le potentiel par la formule

$$V=C\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t'}\right)+U.$$

Si nous posons

$$x=\rho\cos\psi\sin\theta,\qquad y=\rho\sin\psi\sin\theta,\qquad z=\rho'\cos\theta,\qquad (\rho'=\sqrt{\rho^2-c^2})$$

et que nous éliminions ψ et θ entre ces trois équations, nous aurons une famille d'ellipsoïdes planétaires homofocaux au paramètre ρ. L'ellipsoïde correspondant à $\rho' = a$ sera pris pour la surface du conducteur. Désignons par $(\rho_0, \psi_0, \theta_0)$ le point A du conducteur par lequel entre le courant et posons

$$\sqrt{\rho_0^2 - c^2} = \rho'_0;$$

la fonction t^{-1} satisfait à l'équation $\Delta t^{-1} = 0$; donc, si ρ' est $< \rho'_0$, on peut poser (*Cours de Phys. math.*, n° 110)

$$\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} C_{n,l} \Theta_{n,l}(\theta) R_{n,l}(\rho') \cos l(\psi - \psi_0),$$

en faisant

$$R_{n,l} = (c^2 + \rho'^2)^{\frac{l}{2}} \left[\rho'^{n-l} + \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)} c^2 \rho'^{n-l-2} + \dots \right].$$

Posons aussi

$$F_{n,l}(\rho') = (2n+1) R_{n,l}(\rho') \int_{\rho'}^{\infty} \frac{d\rho'}{R^2(\rho')(\rho'^2 + c^2)};$$

cette fonction satisfera à la même équation que $R_{n,l}$

$$\frac{d}{d\rho'} \left[(c^2 + \rho'^2) \frac{dR}{d\rho'} \right] - \left[n(n+1) - \frac{l^2 c^2}{\rho'^2 + c^2} \right] R = 0,$$

et $R_{n,l}(\rho') F_{n,l}(\rho'_0)$ se réduira à $\rho'^n \rho_0'^{-n-1}$ pour $c = 0$; on pourra donc poser, pour $\rho' < \rho'_0$,

$$\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} A_{n,l} \Theta_{n,l}(\theta_0) \Theta_{n,l}(\theta) F_{n,l}(\rho'_0) R_{n,l}(\rho') \cos l(\psi - \psi_0),$$

et cette expression devra se réduire à l'expression semblable relative à la sphère, quand on y fera $c = 0$; or $A_{n,l}$ est un coefficient numérique; il aura donc la même valeur que pour la sphère; on trouve facilement que l'on a

$$A_{n,l} = \frac{4}{2n+1} \frac{1}{K_{n,l}},$$

$K_{n,l}$ ayant la valeur donnée (*Cours de Phys. math.*, n° 86); on peut aussi écrire

$$A_{n,l}=2\left[\frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{1.2\ldots n}\right]^2\frac{n(n-1)\ldots(n-l+1)}{(n+1)(n+2)\ldots(n+l)}$$

(LAPLACE, *Méc. céleste*, t. II, Liv. III, n° 15). Mais, lorsque $l=0$, il faut diviser par 2 le second membre.

Nous pouvons aussi poser

$$U=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}D_{n,l}\Theta_{n,l}(\vartheta)R_{n,l}(\rho')\cos l(\psi-\psi_0)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}D'_{n,l}\Theta_{n,l}(\vartheta)R_{n,l}(\rho')\cos l(\psi-\psi_1).$$

Regardons maintenant ρ' comme plus grand que ρ'_0 et ρ'_1; alors t et t' étant les distances du point (ρ, θ, ψ) aux deux points $(\rho_0, \theta_0, \psi_0)$ et $(\rho_1, \theta_1, \psi_1)$, nous aurons

$$\frac{1}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}A_{n,l}\Theta_{n,l}(\vartheta_0)\Theta_{n,l}(\vartheta)R_{n,l}(\rho'_0)F_{n,l}(\rho')\cos l(\psi-\psi_0),$$

$$\frac{1}{t'}=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n}A_{n,l}\Theta_{n,l}(\vartheta_1)\Theta_{n,l}(\theta)R_{n,l}(\rho'_1)F_{n,l}(\rho')\cos l(\psi-\psi_1).$$

Ensuite la condition à la surface

$$\frac{dV}{dn}=0 \qquad \text{pour} \qquad \rho'=a$$

peut s'écrire

$$\frac{dU}{d\rho'}+C\frac{d}{d\rho'}\left(\frac{1}{t}\right)-C\frac{d}{d\rho'}\left(\frac{1}{t'}\right)=0;$$

ce qui permet d'en conclure le coefficient $D_{n,l}$, et, en posant, pour simplifier,

$$CA_{n,l}\frac{1}{\left[\frac{dR_{n,l}(\rho')}{d\rho'}\right]_a}\left[\frac{dF_{n,l}(\rho')}{d\rho'}\right]_a=H_{n,l},$$

nous aurons

$$U = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} H_{n,l}\Theta_{n,l}(\theta_0)\Theta_{n,l}(\theta)R_{n,l}(\rho'_0)R_{n,l}(\rho')\cos l(\psi - \psi_0)$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{l=0}^{n} H_{n,l}\Theta_{n,l}(\theta_1)\Theta_{n,l}(\vartheta)R_{n,l}(\rho'_1)R_{n,l}(\rho')\cos l(\psi - \psi_1).$$

30. Supposons ensuite que les deux points A et A', par lesquels entre et sort le courant, soient situés aux extrémités d'un diamètre de l'équateur, et, en conséquence, posons

$$\psi_0 = 0, \qquad \theta_0 = \frac{\pi}{2}, \qquad \rho'_0 = a,$$
$$\psi_1 = \pi, \qquad \theta_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad \rho'_1 = a.$$

Comme on a

$$\Theta_{n,l}(\vartheta) = \sin^l\theta\left[\cos^{n-l}\theta - \frac{(n-l)(n-l-1)}{2(2n-1)}\cos^{n-l-2}\theta + \dots\right],$$

$\Theta_{n,l}$ sera nul pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ si $n - l$ est impair et se réduira à son dernier terme si $n - l$ est pair. D'après cela, posons

$$b_{n,l} = \pm\frac{1.3.5\dots(n-l-1)}{(2n-1)(2n-3)\dots(n-l+1)},$$

en prenant le signe + ou − suivant que $n - l$ est de la forme $4p$ ou $4p + 2$, mais en faisant toutefois

$$b = \tfrac{1}{2} \qquad \text{si} \qquad n - l = 0,$$

et nous aurons

$$\Theta_{n,l}(\vartheta_0) = \Theta_{n,l}(\theta_1) = b_{n,l}.$$

Les termes de U pour lesquels l est pair se détruisent deux à deux; il ne restera donc aussi que des termes pour lesquels n est impair et l'on aura la formule

$$U = -2\sum_{n=2p+1}\sum_{l=1}^{n} H_{n,l}b_{n,l}R_{n,l}(a)\Theta_{n,l}(\theta)R_{n,l}(\rho')\cos l\psi,$$

où n et l n'ont que des valeurs impaires.

On a ensuite pour un point intérieur $(\rho, 0, \psi)$

$$\frac{1}{t} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} A_{n,l} b_{n,l} F_{n,l}(a) \Theta_{n,l}(\theta) R_{n,l}(\rho') \cos l\psi,$$

$$\frac{1}{t'} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{n} \pm A_{n,l} b_{n,l} F_{n,l}(a) \Theta_{n,l}(\theta) R_{n,l}(\rho') \cos l\psi,$$

en prenant le signe + ou — suivant que l est pair ou impair, et il n'y aura de termes que pour des valeurs paires de $n - l$. On aura donc

$$\frac{1}{t} - \frac{1}{t'} = 2 \sum_{2p+1} \sum_{l=1}^{n} A_{n,l} b_{n,l} F_{n,l}(a) \Theta_{n,l}(\theta) R_{n,l}(\rho') \cos l\psi,$$

en ne prenant pour n et l que des nombres impairs.

Ainsi, en posant

$$2 b_{n,l}[- H_{n,l} R_{n,l}(a) + C A_{n,l} F_{n,l}(a)] = P_{n,l},$$

on aura, pour un point intérieur, la formule

$$V = \sum_{n=2p+1} \sum_{l=1}^{n} P_{n,l} \Theta_{n,l}(\theta) R_{n,l}(\rho') \cos l\psi,$$

où n et l n'ont que des valeurs impaires.

D'après l'expression de $H_{n,l}$, on a

$$P_{n,l} = - 2C b_{n,l} A_{n,l} \frac{1}{\frac{dR_{n,l}}{da}} \left[R_{n,l}(a) \frac{dF_{n,l}}{da} - F_{n,l}(a) \frac{dR_{n,l}}{da} \right];$$

en différentiant la formule donnée ci-dessus

$$\frac{1}{R_{n,l}(\rho')} F_{n,l}(\rho') = (2n+1) \int_{\rho}^{\infty} \frac{d\rho'}{(\rho'^2 + c^2) R^2(\rho')},$$

puis, faisant $\rho' = a$, on a

$$R_{n.l}(a) \frac{dF_{n,l}}{da} - F_{n,l}(a) \frac{dR_{n,l}}{da} = - \frac{2n+1}{a^2 + c^2};$$

il en résulte enfin pour $P_{n,l}$ cette expression beaucoup plus simple

$$P_{n,l} = 2C b_{n,l} A_{n,l} \frac{1}{\frac{dR_{n,l}}{da}} \frac{2n+1}{a^2+c^2},$$

et d'où la fonction $F_{n,l}$ est éliminée.

CHAPITRE V.

EXEMPLES DE COURANTS PERMANENTS DANS DES CONDUCTEURS HOMOGÈNES ET EN PARTICULIER DANS DES PLAQUES.

Sur la résistance d'un conducteur.

1. Nous avons défini au Chapitre I le coefficient de conductibilité $\varkappa$ d'un conducteur homogène et nous avons vu que son inverse est ce qu'on appelle la *résistance spécifique* de ce corps. Nous allons ensuite définir ce qu'on entend par la résistance d'un conducteur.

Concevons un conducteur dont toute la surface soit au contact d'un milieu isolant, excepté en deux parties E et E′ par lesquelles entre et sort un courant, et admettons que le potentiel ait la même valeur en tous les points de E et une autre valeur commune à tous les points de E′.

Nous pouvons nous représenter tout le volume de ce conducteur comme décomposé en filets dirigés suivant les courants. Ces filets auront tous le même potentiel V_1 sur la base d'entrée et le même potentiel V_2 sur la base de sortie. On obtiendra alors la résistance du conducteur, comme on a fait (Chap. II, n° 4) pour obtenir la résistance d'un conducteur multiple. Si l'on désigne par $i_1, i_2, \ldots$ l'intensité du courant dans chaque filet et par $r_1, r_2, \ldots$ la résistance qu'il oppose, nous aurons

$$V_1 - V_2 = r_1 i_1, \qquad V_1 - V_2 = r_2 i_2, \qquad \ldots;$$

par suite,

$$(V_1 - V_2)\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots\right) = I,$$

en désignant par I l'intensité totale du courant. Posons

$$\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \ldots = \frac{1}{\mathcal{R}};$$

$\mathcal{R}$ est appelé la *résistance du conducteur* et, d'après la formule précédente, on a

$$\mathcal{R} = \frac{V_1 - V_2}{I}.$$

La résistance spécifique R d'un conducteur homogène est la résistance d'un cube dont le côté est l'unité et formé de la matière du conducteur, le courant étant dirigé parallèlement à une des arêtes et réparti uniformément. C'est ce qui résulte de la formule donnée (Chap. II, n° 2) pour la résistance d'un conducteur cylindrique traversé par un courant dans la direction de l'axe.

Courants dans une plaque plane.

2. Concevons une plaque plane, homogène et d'épaisseur constante très petite. Si cette plaque est traversée par des courants permanents, on peut admettre que le potentiel V ne varie pas à l'intérieur de la plaque suivant la normale aux faces. Donc, si l'axe des z est pris suivant la direction de cette normale, V satisfait à l'intérieur de la plaque à l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0,$$

et, en désignant par dn' l'élément de normale intérieure au contour de la plaque, V est soumis sur ce contour à la condition

$$\frac{dV}{dn'} = 0.$$

Quand la fonction V sera trouvée, les courbes d'égal potentiel seront données par l'équation

$$V = \text{const.},$$

et les courbes de courant par l'équation différentielle

$$\frac{dV}{dy}dx - \frac{dV}{dx}dy = 0.$$

Si la plaque est mise en communication avec une pile par deux fils,

nous supposerons que l'extrémité de chaque fil soit une section droite appliquée sur une des faces de la plaque.

Si l'on réduit les extrémités des électrodes à deux points A et A′, situés sur le plan moyen de la plaque, l'équation (α) ne sera en défaut qu'en ces deux points; V pourra donc être regardé comme le potentiel logarithmique de deux masses finies, placées en A et A′, et d'une certaine masse située sur le bord de la plaque. Ainsi nous aurons

$$V = C \log t + C' \log t' + U,$$

en désignant par C et C′ deux constantes, par t et t' les distances du point (x, y) aux points A et A′, et par U le potentiel logarithmique d'une masse située sur le bord de la plaque.

Désignons par I l'intensité du courant qui entre dans la plaque, par $\varkappa$ le coefficient de conductibilité et par h l'épaisseur de la plaque. Autour des points A et A′, décrivons des cercles infiniment petits que nous prenons pour bases de cylindres droits situés dans la plaque, et, en raisonnant comme au n° 2 du Chapitre précédent, nous trouvons

$$C = \frac{-I}{2\pi\varkappa h} = -C';$$

nous avons donc

$$(\alpha) \qquad V = \frac{I}{2\pi\varkappa h} \log \frac{t'}{t} + U.$$

Si la plaque était indéfinie, U serait nul et les courbes d'égal potentiel seraient données par l'équation

$$\frac{t'}{t} = \text{const.};$$

elles forment une série de cercles qui rencontrent chacun la droite AA′ et son prolongement en deux points qui sont en moyenne harmonique avec A et A′, et les courbes de courant, qui sont les trajectoires orthogonales de ces cercles, sont elles-mêmes des cercles qui passent par les points A et A′.

3. Il est utile de s'expliquer comment l'expression (α) du potentiel peut s'accorder avec celle que nous avons obtenue dans le Chapitre IV

pour la valeur du potentiel à l'intérieur d'un corps à trois dimensions quelconques, traversé par des courants permanents. D'après cette formule, nous devons avoir

$$V = D\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + \varphi,$$

où φ désigne le potentiel d'une double couche située à la surface de la plaque et où $\frac{D}{t}$, $-\frac{D}{t'}$ sont les potentiels de doubles couches situées respectivement sur le fil qui amène et sur le fil qui emporte le courant.

Prenons pour plan des x, y le plan moyen de la plaque; nous aurons

$$\frac{dV}{dn'} = 0$$

sur les deux faces de la plaque ou pour $z = \pm \frac{h}{2}$. Aux environs du point A situé sur le plan moyen, $-\frac{D}{t'}$ est négligeable vis-à-vis de $\frac{D}{t}$ et, par suite,

$$\frac{d}{dz}\left(\frac{D}{t} + \varphi\right)$$

s'annule aux environs du point A pour $z = \pm \frac{h}{2}$, et, à cause de la petitesse de h, la quantité

$$p = \frac{D}{t} + \varphi$$

peut être considérée comme indépendante de z; elle satisfait donc à l'équation

$$\frac{d^2p}{dx^2} + \frac{d^2p}{dy^2} = 0. \qquad (\beta)$$

Or, au point A, p est infini; car, s'il en était autrement, V ne serait pas infini en A et de même en A', et l'on en conclurait facilement qu'il n'y aurait pas de courant.

La fonction p devenant infinie au point A et satisfaisant à (β) aux environs de ce point, on a à ces environs

$$p = \frac{D}{t} + \varphi = C \log t,$$

si l'on désigne par C une constante et par t_0 la valeur de t dans laquelle on a fait $z = 0$.

Ainsi la fonction V renferme le terme $C \log t_0$ par lequel elle devient infinie en A; on voit de même qu'elle renferme le terme $C' \log t'_0$, t'_0 étant la valeur de t', dans laquelle on fait $z = 0$. Puis on reconnaît, comme ci-dessus, qu'on a $C' = -C$ et qu'on peut poser

$$V = C(\log t_0 - \log t'_0) + U,$$

U étant une fonction finie et continue, ainsi que ses dérivées dans toute l'étendue de la plaque et qui satisfait à l'équation

$$(\gamma) \qquad \frac{d^2U}{dx^2} + \frac{d^2U}{dy^2} = 0.$$

En égalant les deux expressions de V, on a, pour le potentiel de la double couche,

$$\varphi = -D\left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t'}\right) + C \log \frac{t_0}{t'_0} + U,$$

qui ne satisfait donc pas à l'équation (γ); enfin la puissance de la double couche est $\frac{V}{4\pi}$ (Chap. IV, n° 5).

Courants dans une plaque circulaire.

4. Le courant entrant et sortant par les points A et A', le potentiel dans la plaque circulaire peut s'écrire comme ci-dessus

$$(b) \qquad V = C \log \frac{t}{t'} + U.$$

Prenons des coordonnées polaires R, θ dont l'origine soit au centre de la plaque et désignons par (R', θ') et (R'', θ'') les points A et A'; puis représentons les angles $\theta - \theta'$ et $\theta - \theta''$ par G et G'; nous aurons

$$t^2 = R^2 + R'^2 - 2RR' \cos G, \qquad t'^2 = R^2 + R''^2 - 2RR'' \cos G'.$$

Or, si α est < 1, on a

$$\log(1 - 2\alpha\cos G + \alpha^2) = \log(1 - \alpha e^{G\sqrt{-1}}) + \log(1 - \alpha e^{-G\sqrt{-1}})$$
$$= -2\left(\alpha\cos G + \frac{\alpha^2}{2}\cos 2G + \dots\right).$$

Donc si le point (R, 0) est plus éloigné du centre que les points A et A′, on a

$$\log t = \log R - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{R'^n}{R^n}\cos nG,$$

$$\log t' = \log R - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\frac{R''^n}{R^n}\cos nG'.$$

Nous pouvons poser, en négligeant une constante,

$$U = \sum_{1}^{\infty} H_n \frac{R^n}{a^n},$$

a étant le rayon de la plaque, et ensuite déterminer le coefficient H_n qui dépend de $\cos n\theta$ et $\sin n\theta$ par la condition

$$\frac{dV}{dR} = 0 \qquad \text{pour} \qquad R = a.$$

Après la substitution de l'expression de V dans cette condition, la réduction ne peut se faire qu'entre des termes qui dépendent du même multiple de θ; on a donc

$$H_n = -\frac{C}{na^n}(R'^n\cos nG - R''^n\cos nG'),$$

par suite

$$\sum_{1}^{\infty} H_n\frac{R^n}{a^n} = -C\sum\frac{1}{n}\frac{R^nR'^n}{a^{2n}}\cos nG + C\sum\frac{1}{n}\frac{R^nR''^n}{a^{2n}}\cos nG'.$$

Désignons par B et B′ les points conjugués de A et A′, et par R_1 et R_2 leurs distances au centre; nous aurons

$$R_1 = \frac{a^2}{R'}, \qquad R_2 = \frac{a^2}{R''},$$

et par suite

$$\sum_{1}^{\infty} H_n \frac{R^n}{a^n} = -C\sum \frac{1}{n}\frac{R^n}{R_1^n}\cos nG + C\sum \frac{1}{n}\frac{R^n}{R_2^n}\cos nG'$$
$$= C\log\frac{t_1}{R} - C\log\frac{t'_1}{R},$$

t_1 et t'_1 étant les distances de B et B′ au point (R, θ) et ayant pour valeurs

$$t_1 = \sqrt{R^2 + R_1^2 - 2RR_1\cos G}, \qquad t_2 = \sqrt{R^2 + R_2^2 - 2RR_2\cos G'}.$$

On a donc enfin, à une constante près,

$$(c) \qquad V = C\log\frac{tt_1}{t't'_1}.$$

Si les deux extrémités des électrodes sont sur le bord de la plaque, B et B′ coïncident avec A et A′ et l'on a

$$V = 2C\log\frac{t}{t'}.$$

On a alors les mêmes lignes d'égal potentiel et les mêmes lignes de courant que pour une plaque infinie.

Kirchhoff est le premier qui se soit occupé de la théorie de la distribution des courants dans une plaque. Il a ensuite prouvé l'accord de la théorie avec l'expérience dans le cas où les extrémités des électrodes sont sur le bord de la plaque. Il employait, de plus, deux fils reliés à un galvanomètre; il laissait fixe sur la plaque l'extrémité d'un des fils et déplaçait sur cette plaque l'extrémité de l'autre fil, de manière que le galvanomètre n'indiquât aucun courant. Il déterminait ainsi une ligne d'égal potentiel, qui était celle qui est indiquée par la théorie.

5. *Résistance de la plaque.* — Pour déterminer la résistance de la plaque, il faut avoir égard au rayon ρ des électrodes. Le potentiel, à l'intérieur du fil et à une petite distance de la plaque, a une valeur constante pour une même section droite. Or on peut admettre aussi, avec une grande approximation, que, dans la surface de contact ou

surface-électrode, le potentiel V a aussi une valeur constante et que, au delà du fil dans la plaque, V est donné par la même expression que lorsque la surface électrode se réduit à un point. D'ailleurs, nous pouvons effectivement supposer que V est donné par cette expression sur le contour même du fil; car nous allons voir que V y a une valeur constante.

Si nous mettons le point (R, θ) que nous désignerons par P sur la circonférence de rayon ρ qui a pour centre le point A, la formule (*c*) deviendra

$$V_1 = -\frac{I}{2\pi \times h} \log \frac{\rho \times AB}{AA' \times AB'},$$

en remplaçant PB, PA′, PB′ respectivement par AB, AA′ et AB′; ce qui modifie très peu l'expression. Ainsi V_1 a une valeur constante sur tous les points de la circonférence de rayon ρ et nous la considérons comme la valeur du potentiel sur la surface-électrode en A.

On a de même, pour le potentiel, sur la surface-électrode en A′

$$V_2 = -\frac{I}{2\pi \times h} \log \frac{AA' \times A'B}{\rho \times A'B'}.$$

On a donc

$$\frac{V_1 - V_2}{I} = \frac{-1}{2\pi \times h} \log \frac{\rho^2 \times AB \times A'B'}{\overline{AA'}^2 \times A'B \times AB'},$$

et, d'après ce qui a été dit au n° 1, cette formule donne la résistance de la plaque.

Cette méthode, donnée par Kirchhoff pour déterminer la résistance de la plaque, ne sera, dans la pratique, susceptible de quelque précision qu'autant que la plaque sera d'une épaisseur très mince et notablement plus petite que le rayon des fils.

Force magnétique exercée par la plaque à l'extérieur.

6. Kirchhoff a déterminé l'action magnétique de la plaque sur un pôle d'aimant placé à une distance infiniment petite de la plaque. Nous allons résoudre le même problème, en prenant ce pôle dans une position quelconque.

Les composantes du courant sont

$$u = -\varkappa \frac{dV}{dx}, \qquad v = -\varkappa \frac{dV}{dy}, \qquad w = 0,$$

et, en désignant par h l'épaisseur de la plaque, on a, pour les fonctions $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ (Chap. IV, n° 6),

$$\mathfrak{F} = -h\varkappa \int \frac{dV}{dx}\frac{d\sigma}{r}, \qquad \mathfrak{G} = -h\varkappa \int \frac{dV}{dy}\frac{d\sigma}{r}, \qquad \mathfrak{H} = 0,$$

où les intégrales sont étendues à tous les éléments $d\sigma$ de la surface moyenne de la plaque et où r est la distance du point $(x, y, 0)$ situé sur $d\sigma$ au point (ξ, η, ζ) où l'on recherche l'action magnétique. On aura ensuite pour les composantes de la force magnétique en ce point

$$X = -\frac{d\mathfrak{G}}{d\zeta}, \qquad Y = \frac{d\mathfrak{F}}{d\zeta}, \qquad Z = \frac{d\mathfrak{G}}{d\xi} - \frac{d\mathfrak{F}}{d\eta}.$$

Supposons que les deux points A et A′, par lesquels entre et sort le courant, soient situés sur le bord de la plaque; nous aurons

$$V = 2C(\log t - \log t').$$

Réduisons d'abord V à son premier terme et désignons par $\mathfrak{F}_1$, $\mathfrak{G}_1$, $\mathfrak{H}_1$, X_1, Y_1, Z_1 les parties de $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, X, Y, Z correspondantes; il sera facile d'en déduire les parties qui proviennent du second terme de V.

Le point A étant représenté par $(x', y', 0)$, nous aurons

$$\mathfrak{F}_1 = -2h\varkappa C \int \frac{x - x'}{t^2}\frac{d\sigma}{r} = \frac{I}{\pi}\int \frac{x - x'}{t^2}\frac{d\sigma}{r},$$

avec

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + \zeta^2},$$

et nous avons de même

$$\mathfrak{G}_1 = \frac{I}{\pi}\int \frac{y - y'}{t^2}\frac{d\sigma}{r}.$$

Prenons des coordonnées polaires dont l'origine soit au point A et posons en conséquence

$$x - x' = t\cos\alpha, \qquad y - y' = t\sin\alpha, \qquad d\sigma = t\,dt\,d\alpha.$$

Il en résultera

$$\mathcal{F}_1 = \frac{I}{\pi}\int \cos\alpha\, d\alpha \int \frac{dt}{r},$$

avec

$$r^2 = t^2 + 2[(x'-\xi)\cos\alpha + (y'-\eta)\sin\alpha]t + (x'-\xi)^2 + (y'-\eta)^2 + \zeta^2.$$

L'intégrale, par rapport à t, doit être prise depuis zéro jusqu'à la distance v du point A à un point de la circonférence du cercle. Dans l'équation du cercle

$$x^2 + y^2 = a^2,$$

faisons

$$x = x' + v\cos\alpha, \qquad y = y' + v\sin\alpha,$$

et nous obtenons

$$v = -2(x'\cos\alpha + y'\sin\alpha).$$

Comme le point (x', y') est sur le cercle, faisons

$$x' = a\cos\varepsilon, \qquad y' = a\sin\varepsilon$$

et nous aurons enfin

$$v = -2a\cos(\alpha - \varepsilon).$$

Ensuite nous avons

$$\mathcal{F}_1 = \frac{I}{\pi}\int \cos\alpha\, d\alpha \int_0^v \frac{dt}{r},$$

l'intégrale par rapport à α étant prise entre deux limites distantes de π et correspondant à la direction de la tangente au point A de part et d'autre de ce point. Mais il est aisé de voir qu'on a

$$\cos\alpha\, d\alpha \int_0^v \frac{dt}{r} = \cos(\alpha+\pi)\, d\alpha \int_0^{-v} \frac{dt}{r_1},$$

en désignant par r_1 ce que devient r par le changement de α en $\alpha + \pi$. Donc, en prenant l'intégrale par rapport à α entre o et 2π, on double la valeur de $\mathcal{F}_1$ et l'on a

$$\mathcal{F}_1 = \frac{I}{2\pi}\int_0^{2\pi} \cos\alpha\, d\alpha \int_0^v \frac{dt}{r}$$

ou encore

$$\mathcal{F}_1 = \frac{I}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\alpha\, d\alpha \int_0^v \frac{dt}{r}.$$

L'intégration par rapport à t se fait facilement. Posons

$$A = a\cos(\alpha-\varepsilon) - \xi\cos\alpha - \eta\sin\alpha,$$
$$B = (a\cos\varepsilon-\xi)^2 + (a\sin\varepsilon-\eta)^2 + \zeta^2,$$

nous aurons

$$r^2 = t^2 + 2At + B,$$

puis

$$\mathcal{F}_1 = \frac{I}{\pi}\int_0^\pi \log\frac{A+v+\sqrt{v^2+2Av+B}}{A+\sqrt{B}}\cos\alpha\,d\alpha,$$

et de même

$$\mathcal{G}_1 = \frac{I}{\pi}\int_0^\pi \log\frac{A+v+\sqrt{v^2+2Av+B}}{A+\sqrt{B}}\sin\alpha\,d\alpha.$$

7. Nous calculerons ensuite X_1, Y_1, Z_1 par les formules

$$X_1 = -\frac{d\mathcal{G}_1}{d\zeta}, \qquad Y_1 = \frac{d\mathcal{F}_1}{d\zeta}, \qquad Z_1 = \frac{d\mathcal{G}_1}{d\xi} - \frac{d\mathcal{F}_1}{d\eta}.$$

$\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{G}_1$ ne dépendent de ζ que par B et nous obtenons

$$X_1 = -\frac{I}{\pi}\zeta T_1, \qquad Y_1 = \frac{I}{\pi}\zeta T_2, \tag{1}$$

en posant

$$T_1 = \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{v^2+2Av+B}\,(A+v+\sqrt{v^2+2Av+B})} - \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{A+\sqrt{B}},$$
$$T_2 = \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{\sqrt{v^2+2Av+B}\,(A+v+\sqrt{v^2+2Av+B})} - \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^\pi \frac{\cos\alpha\,d\alpha}{A+\sqrt{B}}.$$

D'autre part, on a

$$\frac{d\mathcal{G}_1}{d\xi} = \frac{I}{\pi}\int_0^\pi \mathcal{P}\sin\alpha\,d\alpha, \qquad \frac{d\mathcal{F}_1}{d\eta} = \frac{I}{\pi}\int_0^\pi \mathcal{Q}\cos\alpha\,d\alpha,$$

en posant

$$\mathcal{P} = \frac{-\cos\alpha\sqrt{v^2+2Av+B} - v\cos\alpha + \xi - a\cos\varepsilon}{\sqrt{v^2+2Av+B}\,(A+v+\sqrt{v^2+2Av+B})} + \frac{\cos\alpha\sqrt{B}-\xi+a\cos\varepsilon}{\sqrt{B}\,(A+\sqrt{B})},$$
$$\mathcal{Q} = \frac{-\sin\alpha\sqrt{v^2+2Av+B} - v\sin\alpha + \eta - a\sin\varepsilon}{\sqrt{v^2+2Av+B}\,(A+v+\sqrt{v^2+2Av+B})} + \frac{\sin\alpha\sqrt{B}-\eta+a\sin\varepsilon}{\sqrt{B}\,(A+\sqrt{B})}.$$

On a donc

$$\mathfrak{P}\sin\alpha - \mathfrak{Q}\cos\alpha = \frac{P}{\sqrt{\rho^2+2A\rho+B}\,(A+\rho+\sqrt{\rho^2+2A\rho+B})} - \frac{P}{\sqrt{B}\,(A+\sqrt{B})},$$

en posant

$$P = (\xi - a\cos\varepsilon)\sin\alpha - (\eta - a\sin\varepsilon)\cos\alpha,$$

et l'on obtient

$$Z_1 = \frac{I}{\pi}(\xi - a\cos\varepsilon)T_1 - \frac{I}{\pi}(\eta - a\sin\varepsilon)T_2. \tag{2}$$

Il résulte des formules (1) et (2) qu'on peut exprimer Z_1 au moyen de X_1 et Y_1 et qu'on a

$$Z_1 = -(\xi - a\cos\varepsilon)\frac{X_1}{\zeta} - (\eta - a\sin\varepsilon)\frac{Y_1}{\zeta}.$$

8. Simplifions les expressions de T_1 et T_2. Multiplions par

$$\sqrt{\rho^2+2A\rho+B} - A - \rho$$

les deux termes de la différentielle de la première intégrale qui compose T_1, et nous aurons

$$T_1 = \int_0^\pi \frac{-(A+\rho)\sin\alpha\,d\alpha}{(B-A^2)\sqrt{\rho^2+2A\rho+B}} + \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{B-A^2} - \frac{1}{\sqrt{B}}\int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{B}+A}.$$

Employons la formule

$$\frac{1}{B-A^2} = \frac{1}{2\sqrt{B}}\left(\frac{1}{\sqrt{B}+A} + \frac{1}{\sqrt{B}-A}\right),$$

et, en posant

$$\int_0^\pi \frac{-(A+\rho)\sin\alpha\,d\alpha}{(B-A^2)\sqrt{\rho^2+2A\rho+B}} = \Psi_1,$$

nous aurons

$$T_1 = \Psi_1 + \frac{1}{2\sqrt{B}}\left(\int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{B}-A} - \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\,d\alpha}{\sqrt{B}+A}\right).$$

De même, en posant

$$\int_0^\pi \frac{-(A+\nu)\cos\alpha\, d\alpha}{(B-A^2)\sqrt{\nu^2+2A\nu+B}} = \Psi_2,$$

nous aurons

$$T_2 = \Psi_2 + \frac{1}{2\sqrt{B}}\left(\int_0^\pi \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{B}-A} - \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{B}+A}\right).$$

Calculons les quatre intégrales

$$H_1 = \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{B}+A}, \qquad H_2 = \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{B}+A},$$

$$H'_1 = \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{\sqrt{B}-A}, \qquad H'_2 = \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{\sqrt{B}-A}.$$

Si l'on pose

$$L = a\cos\varepsilon - \xi, \qquad M = a\sin\varepsilon - \eta,$$

on obtiendra

$$H_1 = \int_0^\pi \frac{\sin\alpha\, d\alpha}{M\sin\alpha + L\cos\alpha + \sqrt{B}}, \qquad H_2 = \int_0^\pi \frac{\cos\alpha\, d\alpha}{M\sin\alpha + L\cos\alpha + \sqrt{B}},$$

et, comme on a

$$\int_0^\pi \frac{d\alpha}{M\sin\alpha + L\cos\alpha + \sqrt{B}} = \frac{2}{\zeta}\operatorname{arc\,tang}\frac{\zeta}{M},$$

on forme immédiatement ces deux équations

$$MH_1 + LH_2 = \pi - \frac{2\sqrt{B}}{\zeta}\operatorname{arc\,tang}\frac{\zeta}{M},$$

$$-LH_1 + MH_2 = \log\frac{\sqrt{B}-L}{\sqrt{B}+L}.$$

Si, dans ces deux équations, nous changeons L et M en $-L$ et $-M$, H_1 et H_2 se changent en H'_1 et H'_2, et nous en tirons ensuite

$$H'_1 - H_1 = -\frac{2M\pi}{L^2+M^2}, \qquad H'_2 - H_2 = -\frac{2L\pi}{L^2+M^2}.$$

Ainsi, les valeurs de T_1 et T_2 se réduisent à

$$T_1 = \Psi_1 - \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{M\pi}{L^2+M^2}, \qquad T_2 = \Psi_2 - \frac{1}{\sqrt{B}} \frac{L\pi}{L^2+M^2}.$$

9. Les intégrales Ψ_1 et Ψ_2 peuvent être ramenées aux intégrales elliptiques; mais il sera ordinairement plus commode, pour les calculer, d'employer une des méthodes générales de quadrature. Si nous posons

$$p = -(A+\nu) = (a\cos\varepsilon+\xi)\cos\alpha + (a\sin\varepsilon+\eta)\sin\alpha,$$
$$q^2 = B - A^2 = (L\sin\alpha - M\cos\alpha)^2 + \zeta^2,$$

nous aurons

$$\Psi_1 = \int_0^\pi \frac{p\sin\alpha\, d\alpha}{q^2\sqrt{p^2+q^2}}, \qquad \Psi_2 = \int_0^\pi \frac{p\cos\alpha\, d\alpha}{q^2\sqrt{p^2+q^2}}.$$

Les composantes de la force magnétique produite par la plaque circulaire sont

$$X_1 - X_2, \quad Y_1 - Y_2, \quad Z_1 - Z_2,$$

X_2, Y_2, Z_2 se déduisant des formules (1) et (2) qui donnent X_1, Y_1, Z_1 par le changement de l'angle ε en l'angle ε' correspondant à A'. Pour la commodité du calcul, on pourra choisir l'axe polaire de manière que ε' soit égal à $\pi - \varepsilon$.

10. Désignons par X'_1, Y'_1, Z'_1 les composantes de la force magnétique du fil qui apporte le courant en A et par $-X'_2$, $-Y'_2$, $-Z'_2$ les composantes de la force magnétique du fil qui part du point A'. Ces forces se calculeront facilement si les fils sont rectilignes (Chap. IV, n° 13).

Supposons la plaque horizontale et désignons par F_1, F_2, F_3 les trois composantes de la force magnétique terrestre, de sorte que la troisième F_3 est verticale.

Les composantes de la force magnétique totale au point (ξ, η, ζ) seront

$$X_1 - X_2 + X'_1 - X'_2 + F_1 = \mathfrak{X},$$
$$Y_1 - Y_2 + Y'_1 - Y'_2 + F_2 = \mathfrak{Y},$$
$$Z_1 - Z_2 + Z'_1 - Z'_2 + F_3 = \mathfrak{Z},$$

Supposons une aiguille aimantée très petite dont le centre soit au point (ξ, η, ζ) et libre de tourner autour de ce point. Désignons par δ l'angle que sa projection horizontale fait avec l'axe des x et par I son inclinaison sur l'horizon ; nous aurons

$$\operatorname{tang}\delta = \frac{\mathfrak{Y}}{\mathfrak{X}}, \qquad \operatorname{tang} I \quad \frac{\mathfrak{Z}}{\sqrt{\mathfrak{X}^2 + \mathfrak{Y}^2}},$$

si l'on peut négliger la différence d'action magnétique le long de l'aiguille.

Si l'on veut plus d'approximation, on considérera le magnétisme de la petite aiguille comme concentré en deux pôles, et l'on trouvera encore facilement les angles δ et I.

Courants permanents dans une plaque courbe.

11. La plaque courbe que nous considérons est homogène, isotrope, d'une épaisseur constante extrêmement petite, et elle est traversée par des courants permanents.

Désignons par V le potentiel de l'électricité en un point d'une des faces σ qui terminent la plaque ; nous regarderons V comme constant sur la normale à σ menée à l'intérieur de la plaque. Sur cette surface traçons une série de courbes s_1 dont l'équation est

$$V = \text{const.};$$

puis traçons les trajectoires orthogonales s_2 de ces courbes et désignons par

$$\varphi = \text{const.}$$

l'équation de ces lignes de courant. La force électromotrice en chaque point sera dirigée suivant ces dernières lignes et aura pour valeur $-\frac{dV}{ds_2}$.

Comptons la longueur de la ligne s_1 à partir d'un point déterminé de cette ligne et désignons par α la quantité d'électricité qui traverse l'arc s_1 dans l'unité de temps ; alors $\frac{d\alpha}{ds_1} ds_1$ sera le courant qui traver-

sera normalement ds_1 et l'on aura

$$\frac{d\alpha}{ds_2} = 0.$$

Puisque les courants sont permanents, la force électromotrice $-\frac{dV}{ds_2}$ doit être égale et de sens contraire à la force de résistance, qui est proportionnelle à l'intensité du courant et qui peut être représentée par l'expression $K\frac{d\alpha}{ds_1}$, où K désigne une constante; ainsi nous avons

$$\frac{dV}{ds_2} = K\frac{d\alpha}{ds_1}. \tag{1}$$

Faisons

$$V = K\beta, \tag{2}$$

nous aurons

$$\frac{d\beta}{ds_2} = \frac{d\alpha}{ds_1};$$

nous pouvons donc poser

$$ds_2 = H\,d\beta, \qquad ds_1 = H\,d\alpha, \tag{3}$$

en désignant par H une fonction de α et β.

Si l'on représente par ds l'élément d'une courbe quelconque tracée sur la surface σ, on a

$$ds^2 = ds_1^2 + ds_2^2 = H^2(d\alpha^2 + d\beta^2). \tag{4}$$

Réciproquement, si l'on a cette équation, les lignes

$$\beta = \text{const.}, \qquad \alpha = \text{const.}$$

forment pour la plaque courbe un système possible de lignes d'égal potentiel et un système correspondant de lignes de courant.

En effet, de l'équation (4) on déduit les deux équations (3), en faisant successivement $\alpha = \text{const.}$ et $\beta = \text{const.}$, et, si l'on pose la formule (2), on a l'équation (1), qui exprime que la force électromotrice est dirigée suivant la ligne s_2 ou $\alpha = \text{const.}$

12. Quand on aura obtenu ces deux systèmes de lignes situées sur la surface σ, il sera facile d'en obtenir d'autres semblables ; il suffira de tirer α' et β' de l'équation

$$\alpha' + \beta'\sqrt{-1} = \mathbf{F}(\alpha + \beta\sqrt{-1}), \tag{5}$$

où le second membre représente une fonction quelconque de

$$\alpha + \beta\sqrt{-1}.$$

En effet, on en déduit

$$\sqrt{-1}\left(\frac{d\alpha}{d\alpha'} + \frac{d\beta}{d\alpha'}\sqrt{-1}\right) = \frac{d\alpha}{d\beta'} + \frac{d\beta}{d\beta'}\sqrt{-1},$$

équation qui se sépare dans les deux suivantes :

$$\frac{d\beta}{d\alpha'} = -\frac{d\alpha}{d\beta'}, \qquad \frac{d\beta}{d\beta'} = \frac{d\alpha}{d\alpha'}. \tag{6}$$

On a donc

$$d\beta = -\frac{d\alpha}{d\beta'}d\alpha' + \frac{d\alpha}{d\alpha'}d\beta',$$

$$d\alpha = \frac{d\alpha}{d\alpha'}d\alpha' + \frac{d\alpha}{d\beta'}d\beta',$$

et, par suite,

$$d\alpha^2 + d\beta^2 = \left[\left(\frac{d\alpha}{d\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta'}\right)^2\right](d\alpha'^2 + d\beta'^2).$$

Ainsi, on déduit de l'équation (4)

$$ds^2 = \mathbf{H}^2\left[\left(\frac{d\alpha}{d\alpha'}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{d\beta'}\right)^2\right](d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

expression qui est de la forme

$$ds^2 = \mathbf{L}^2(d\alpha'^2 + d\beta'^2),$$

où L est une fonction de α' et β'. Il en résulte que des deux systèmes de lignes situées sur σ,

$$\alpha' = \text{const.}, \qquad \beta' = \text{const.},$$

l'un quelconque peut représenter des lignes d'égal potentiel et l'autre les lignes de courant correspondantes.

13. Différentions l'équation (5) par rapport à α ou à β, et nous obtenons les équations semblables à (6)

$$\frac{d\alpha'}{d\alpha} = \frac{d\beta'}{d\beta}, \qquad \frac{d\alpha'}{d\beta} = -\frac{d\beta'}{d\alpha};$$

il en résulte

$$\frac{d^2\alpha'}{d\alpha^2} + \frac{d^2\alpha'}{d\beta^2} = 0, \qquad \frac{d^2\beta'}{d\alpha^2} + \frac{d^2\beta'}{d\beta^2} = 0. \tag{7}$$

Ainsi, ayant obtenu un système de variables α et β, qui donne un premier système de courants, si l'on adopte α et β comme coordonnées, les quantités α' et β' de tout autre système de courants satisferont aux équations (7).

Concevons que la plaque soit maintenue dans un certain équilibre de température et qu'il n'y ait point de déperdition de chaleur par les surfaces de la plaque ; on démontrera facilement que la température U d'équilibre satisfera à l'équation

$$\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2} = 0.$$

Il s'ensuit que les lignes $\alpha' = \text{const.}$ ou $\beta' = \text{const.}$ peuvent représenter un système de lignes isothermes. Remarquons aussi la formule facile à obtenir

$$\Delta U = \frac{1}{H^2}\left(\frac{d^2U}{d\alpha^2} + \frac{d^2U}{d\beta^2}\right). \tag{8}$$

14. Prenons α, β pour les coordonnées rectilignes et rectangulaires d'un point d'un plan. A chaque point (α, β) du plan correspondra un point situé sur σ, qui aura les mêmes coordonnées et qu'on peut appeler l'image du premier point. Si l'on désigne par dl la distance des deux points (α, β) et $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta)$ situés sur le plan, on aura

$$dl^2 = d\alpha^2 + d\beta^2,$$

et, d'après la formule (4), on aura, pour la distance des deux points correspondants sur σ,

$$ds = H\,dl; \tag{9}$$

H ne dépend que de α et β ; donc la ligne *ds*, image de *dl*, est proportionnelle à *dl* et ne varie pas avec la direction de *dl* sur le plan. Par suite, les parties infiniment petites du plan ont pour images, sur la surface σ, des figures semblables.

Il résulte évidemment de là que, si sur un plan on trace deux systèmes de lignes rectangulaires et pouvant représenter des lignes d'égal potentiel et des lignes de courant, les images sur la surface σ de ces deux systèmes de lignes, que l'on déduit de la formule (9), pourront aussi représenter des lignes d'égal potentiel et des lignes de courant. Ainsi le problème de la recherche des courants permanents, qui s'écoulent dans une plaque courbe, peut se ramener à celui de la représentation sur une surface courbe de figures tracées sur un plan, de manière que les images de figures infiniment petites leur soient semblables.

Courants dans une coquille sphérique.

15. On a une coquille sphérique fermée et d'épaisseur constante très petite ; le courant électrique y entre et en sort repectivement par deux points A et A′. Le potentiel V étant supposé ne pas varier dans l'épaisseur, on a, pour l'équation à laquelle il satisfait,

$$(a) \qquad \Delta V = \frac{1}{a^2 \sin\theta} \frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta \frac{dV}{d\theta}\right) + \frac{1}{a^2 \sin^2\theta} \frac{d^2V}{d\psi^2} = 0,$$

où a est le rayon moyen de la coquille et où ψ et θ sont la longitude et le complément de la latitude en chaque point de cette coquille. Posons

$$\varepsilon = \log \operatorname{tang} \frac{\theta}{2},$$

et nous aurons

$$\Delta V = \frac{1}{a^2 \sin^2\theta}\left(\frac{d^2V}{d\varepsilon^2} + \frac{d^2V}{d\psi^2}\right);$$

donc, d'après les formules (8) et (9) des nos 13 et 14, on a, pour le carré d'un arc infiniment petit tracé sur la sphère,

$$(b) \qquad ds^2 = a^2 \sin^2\theta (d\varepsilon^2 + d\psi^2).$$

Faisons un changement de coordonnées et prenons pour nouvel axe polaire le diamètre qui aboutit au point A ; puis désignons par ψ', θ', ε' les quantités analogues à ψ, θ, ε et correspondant à ce nouvel axe. Si l'on suppose le point M, où l'on prend V, très près de A, on pourra négliger l'influence de A′ et V ne dépendra pas de ψ'; on aura donc

$$\frac{d^2 V}{d\varepsilon'^2} = 0,$$

et l'on satisfera à cette équation en posant

$$V = C\varepsilon' = C \log \operatorname{tang} \frac{\theta'}{2},$$

où θ' désigne la distance angulaire du point A au point M. Si donc nous désignons maintenant par λ et λ' les distances angulaires du point M aux points A et A′, et si nous posons

$$V = C \log \operatorname{tang} \frac{\lambda}{2} - C \log \operatorname{tang} \frac{\lambda'}{2},$$

cette expression satisfera à l'équation (a) et se réduira aux valeurs voulues aux environs des points A et A′. La constante C aura la valeur donnée au n° 2.

Menons un plan tangent à la sphère à une extrémité de l'axe polaire; puis, de l'autre extrémité, menons une droite qui rencontrera le plan et la sphère en deux points qui seront images l'un de l'autre : c'est le système de projection stéréographique. Un élément *ds* de ligne située sur la sphère sera donné par (b) et la distance *dl* correspondante sur le plan aura pour carré

$$dl^2 = 4a^2 \operatorname{tang}^2 \frac{\theta}{2} (d\varepsilon^2 + d\psi^2);$$

ce qui prouve la similitude des figures infiniment petites avec leurs images.

Si B et B′ sont deux points du plan par lesquels entre et sort un courant, les lignes de courant qui en résultent dans le plan sont des cercles qui passent par les points B et B′, et les lignes d'égal potentiel sont des cercles orthogonaux sur les premiers (n° 2). Or on sait que, dans

la projection stéréographique, à un cercle du plan correspond un cercle de la sphère. Donc, A et A′ étant les deux points de la sphère qui correspondent aux points B et B′, les lignes de courant sur la sphère seront des cercles qui passent par ces deux points et les lignes d'égal potentiel seront des cercles orthogonaux sur les premiers.

Autres exemples de plaques courbes traversées par des courants permanents.

16. Les exemples suivants de plaques courbes traversées par des courants permanents ont été donnés par Kirchhoff (*Gesammelte Abhandlungen*, p. 56).

Prenons une plaque dont la surface moyenne soit celle d'un cylindre circulaire indéfini de rayon a. Menons un plan perpendiculaire aux génératrices; mettons l'origine des coordonnées polaires au centre de la section et l'axe des z suivant l'axe du cylindre. Soient r le rayon et θ l'angle qui représentent ces coordonnées. A chaque point (r, θ, o) du plan, faisons correspondre un point (a, θ, z) du cylindre en prenant

$$(a) \qquad z = a \log r.$$

Quand r variera de zéro à l'infini, z variera sur le cylindre de $-\infty$ à $+\infty$.

Le carré de la distance dl de deux points infiniment voisins du plan est

$$dl^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2,$$

et, en désignant par ds la distance des deux points correspondants de la surface cylindrique, on a

$$ds^2 = dz^2 + a^2 d\theta^2, \qquad ds = \frac{a}{r} dl.$$

Ainsi les figures infiniment petites du cylindre sont semblables aux figures correspondantes du plan.

Soient B et B′ deux points du plan par lesquels entre et sort un courant et dont les coordonnées sont (r', θ'), (r'', θ''); le potentiel électro-

moteur dans le plan sera

$$C \log \frac{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos(\theta - \theta')}{r^2 + r''^2 - 2rr'' \cos(\theta - \theta'')}.$$

Soient A et A′ les images de B et B′ sur le cylindre, et posons, d'après (*a*),

$$r = e^{\frac{z}{a}}, \qquad r' = e^{\frac{z'}{a}}, \qquad r'' = e^{\frac{z''}{a}},$$

nous aurons, pour le potentiel électromoteur dans la plaque cylindrique,

$$(b) \qquad V = C \log \frac{e^{\frac{2z}{a}} + e^{\frac{2z'}{a}} + 2e^{\frac{z+z'}{a}} \cos(\theta - \theta')}{e^{\frac{2z}{a}} + e^{\frac{2z''}{a}} + 2e^{\frac{z+z''}{a}} \cos(\theta - \theta'')},$$

les courants entrant et sortant par les points A et A′.

Changeons la figure de la section du cylindre en conservant leurs longueurs à tous les éléments du contour; le nouveau cylindre sera exactement applicable sur le premier. Donc, si A_1 et A'_1 sont deux points du second cylindre qui viendraient en A et A′ dans l'application de ce cylindre sur le premier et qu'on suppose un courant entrant par A_1 et sortant par A'_1 dans une plaque ayant ce cylindre pour surface moyenne, le potentiel sera encore donné par la formule (*b*), dans laquelle $a\theta$ représentera maintenant la longueur de la courbe de section droite à partir d'un point fixe.

17. Supposons ensuite une plaque dont la surface moyenne est celle d'un tore fermé, c'est-à-dire une surface engendrée par la révolution d'un cercle autour d'une droite que nous prendrons pour axe des z.

Si nous posons $x^2 + y^2 = R^2$, l'équation de cette surface est

$$(R - a)^2 + z^2 = b^2,$$

et l'on y satisfait en posant

$$x = (a + b\cos v)\cos u,$$
$$y = (a + b\cos v)\sin u,$$
$$z = b \sin v;$$

d'où l'on déduit

$$ds^2 = (a + b\cos v)^2 du^2 + b^2 dv^2.$$

Prenons les variables α et β liées aux premières u et v par les formules

$$u = \frac{\alpha}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad \operatorname{tang}\frac{v}{2} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2b},$$

alors nous aurons

$$ds^2 = \frac{a^2 - b^2}{\left(a - b\cos\frac{\beta}{b}\right)^2}(d\alpha^2 + d\beta^2).$$

On a tous les points de la surface du tore en faisant varier u et v de o à 2π ou α de o à $2\pi\sqrt{a^2 - b^2}$, et β de o à $2\pi b$.

Supposons encore que le courant entre par un point A et sorte par un point A'. Le potentiel V satisfait à l'équation

$$(c) \qquad \frac{d^2V}{d\alpha^2} + \frac{d^2V}{d\beta^2} = 0;$$

il devient infiniment grand aux environs des points A et A', et s'y réduit à $\pm C \log r$, r étant la distance à A ou A'; V a pour période $2\pi\sqrt{a^2 - b^2}$ par rapport à α et $2\pi b$ par rapport à β.

Suivant les notations de Jacobi, écrivons

$$\vartheta(x) = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4\cos 4x - 2q^9\cos 6x + \ldots, \qquad q = e^{-\pi\frac{K'}{K}},$$

puis posons

$$(d) \qquad K = m\pi\sqrt{a^2 - b^2}, \qquad K' = m\pi b;$$

q sera donc déterminé par le rapport

$$\frac{K'}{K} = \frac{b}{\sqrt{a^2 - b^2}};$$

on aura ensuite K par la formule

$$\frac{2K}{\pi} = 1 + 4q + 4q^2 + 4q^4 + 8q^5 + 4q^8 + \ldots,$$

puis m et K' par les formules (d).

Posons encore, en désignant $\sqrt{-1}$ par i,

$$\upsilon = m(\alpha + \beta i),$$

et désignons par υ', β' et υ'', β'' les valeurs de υ et β aux points A et A'; puis écrivons la formule

$$V + \psi i = D\left\{\frac{\beta' - \beta''}{2b}\frac{\upsilon}{K}i + \log\frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(\upsilon - \upsilon'' + iK')\right]}{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(\upsilon - \upsilon' + iK')\right]}\right\} + B,$$

dans laquelle D et B sont deux constantes arbitraires, dont la première est réelle. La fonction $V + \psi i$ satisfait à l'équation (c); cette formule détermine V et ψ, et il est facile de voir que l'expression de V satisfait aux conditions indiquées ci-dessus.

Indiquons comment on pourra calculer la fonction V. Pour cela, posons

$$A = \frac{\pi}{2K}m(\alpha - \alpha'), \qquad B = \frac{\pi}{2K}[m(\beta - \beta') + K'],$$

$$A' = \frac{\pi}{2K}m(\alpha - \alpha''), \qquad B' = \frac{\pi}{2K}[m(\beta - \beta'') + K'];$$

changeons i en $-i$ dans l'équation précédente, pour l'ajouter à l'équation ainsi obtenue; nous obtenons, à une constante près,

$$2V = -D\frac{\beta' - \beta''}{bK}m\beta + D\log[\vartheta(A' + B'i)\vartheta(A' - B'i)] - D\log[\vartheta(A + Bi)\vartheta(A - Bi)].$$

Or on a la formule connue

$$\log\vartheta(x) = -\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} - 2\sum_{r=1}^{\infty}\frac{1}{r}\frac{q^{r}}{1 - q^{2r}}\cos 2rx;$$

et on a, par suite, la formule

$$(A)\qquad \left\{\begin{array}{l}\log[\vartheta(A + Bi)\vartheta(A - Bi)] \\ \quad = -2\sum\frac{1}{r}\frac{q^{2r}}{1 - q^{r}} \\ \quad\quad - 4\sum\frac{1}{r}\frac{q^{r}}{1 - q^{2r}}\cos 2rA\cosh\frac{r\pi K'}{K}\left(1 + \frac{\beta - \beta'}{\pi b}\right),\end{array}\right.$$

dans laquelle la dernière série sera convergente si $\beta - \beta'$ est négatif.

Lorsque $\beta - \beta'$ est positif, on emploiera les formules

$$\vartheta(x) = e^{-\frac{\pi K'}{K}} e^{2xi}\ \vartheta\left(x + \frac{\pi K'}{K} i\right),$$

$$\vartheta(x) = e^{-\frac{\pi K'}{K}} e^{-2xi} \vartheta\left(x - \frac{\pi K'}{K} i\right),$$

dont la seconde se déduit de la première en changeant x en $x - 2iK'$. Changeons x en $A - Bi$ dans la première de ces formules et en $A + Bi$ dans la seconde, puis multiplions les deux formules entre elles et prenons les logarithmes ; nous obtiendrons

$$\log[\vartheta(A + Bi)\vartheta(A - Bi)] = \frac{2\pi m}{K}(\beta - \beta') + \log\vartheta\left(A + Bi - \frac{\pi K' i}{K}\right) + \log\vartheta\left(A - Bi + \frac{\pi K' i}{K}\right),$$

et, en appliquant la formule (A),

$$\text{(B)} \quad \left\{ \begin{array}{l} \log[\vartheta(A + Bi)\vartheta(A - Bi)] \\ \quad = \dfrac{2\pi m}{K}(\beta - \beta') - 2\sum \dfrac{1}{r} \dfrac{q^{2r}}{1 - q^{2r}} \\ \qquad - 4\sum \dfrac{1}{r} \dfrac{q^r}{1 - q^{2r}} \cos 2rA \cosh \dfrac{r\pi K'}{K}\left(1 - \dfrac{\beta - \beta'}{\pi b}\right), \end{array} \right.$$

formule où la dernière série est convergente, quand $\beta - \beta'$ est positif.

On calculera de même $\log\vartheta(A' + B'i)\,\vartheta(A' - B'i)]$ par les formules (A) et (B) en remplaçant α' et β' par α'' et β''.

18. Considérons les trois cas particuliers où l'on a

$$v' = iK'$$

avec

$$1^\circ \quad v'' = 0, \qquad 2^\circ \quad v'' = K, \qquad 3^\circ \quad v'' = K + iK'.$$

Désignons par un accent les coordonnées du point A et par deux accents celles de A′; les coordonnées du point A sont

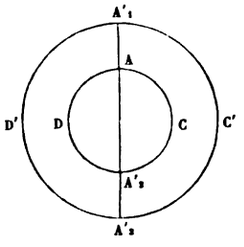
$$u' = 0, \qquad v' = \pi,$$

et celles du point A′

$$1^\circ \quad u'' = 0, \qquad v'' = 0,$$
$$2^\circ \quad u'' = \pi, \qquad v'' = 0,$$
$$3^\circ \quad u'' = \pi, \qquad v'' = \pi.$$

Projetons le tore sur le plan des xy; le contour apparent sera représenté par les deux cercles suivant lesquels le tore est coupé par ce

Fig. 15.



plan. Le point d'entrée A (*fig.* 15) sera sur le cercle intérieur et le point A′, selon les trois cas, sera en A'_1, A'_2 ou A'_3.

Dans le premier cas, on a

$$V + \psi i = D\left\{\frac{\pi v i}{2K} + \log\frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(v + iK')\right]}{\vartheta\left(\frac{\pi v}{2K}\right)}\right\} + B;$$

or on a

$$\vartheta\left(\frac{\pi v}{2K} + \frac{\pi K'}{2K}i\right) = \frac{i}{\sqrt[4]{q}}\, e^{-\frac{v\pi i}{2K}}\,\vartheta_1\left(\frac{\pi v}{2K}\right), \qquad \sin\operatorname{am} v = \frac{1}{\sqrt{k}}\,\frac{\vartheta_1\left(\frac{\pi v}{2K}\right)}{\vartheta\left(\frac{\pi v}{2K}\right)};$$

donc, en disposant convenablement de B, on obtient

$$(I) \qquad V + \psi i = D \log \sin\operatorname{am} v.$$

Dans le deuxième cas, on a

$$V + \psi i = D \left\{ \frac{\pi v i}{2K} + \log \frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(v + K + iK')\right]}{\vartheta\left(\frac{\pi v}{2K}\right)} \right\}$$

ou

$$(II) \qquad V + \psi i = D \log \cos \operatorname{am} v.$$

Enfin, dans le troisième cas, on obtient

$$V + \psi i = D \log \frac{\vartheta\left[\frac{\pi}{2K}(v + K)\right]}{\vartheta\left(\frac{\pi v}{2K}\right)}$$

ou

$$(III) \qquad V + \psi i = D \log \Delta \operatorname{am} v.$$

19. Prenons α, β pour les coordonnées rectangulaires d'un point d'un plan et formons un rectangle (*fig.* 16) dont les côtés correspondent à

$$(1) \qquad \alpha = 0, \quad \alpha = 2\pi\sqrt{a^2 - b^2}, \quad \beta = 0, \quad \beta = 2\pi b,$$

ou à

$$(2) \qquad u = 0, \quad u = 2\pi, \quad v = 0, \quad v = 2\pi.$$

Puis faisons sur le tore une entaille le long du cercle qui se projette sur la droite AA'_1 et le long du cercle $A'_1C'A'_2D'$.

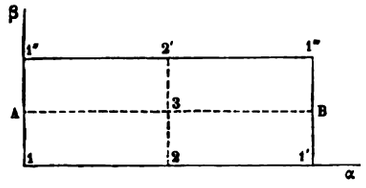
Cette figure sera ainsi terminée à quatre côtés qui correspondront aux quatre côtés du rectangle. Néanmoins, quand on connaîtra les courants qui traversent la plaque dont la surface moyenne est le tore, on ne pourra en déduire, en général, des courants dans la plaque rectangulaire correspondante; car les courants, dans le tore, traversent les cercles donnés par les équations (1) ou (2), et les courants, dans le rectangle, qui sont les images des premiers, traverseraient également les côtés du rectangle.

Mais, au contraire, dans les trois cas particuliers examinés ci-dessus, les cercles (1) ne sont pas traversés par des courants, comme on le

voit immédiatement, sans calcul. Donc, dans le rectangle, image du tore, les quatre côtés qui le terminent ne sont pas non plus traversés par des courants.

La *fig.* 16 ci-jointe représente la plaque rectangulaire. L'image du point A du tore vient sur le rectangle en A et B ; l'image du point A_1

Fig. 16.



est représentée par les quatre points 1, 1', 1'' et 1'''; celle du point A_2 est en 2 et 2'; celle du point A_3 est en un seul point 3. Dans ces trois cas, les formules (I), (II), (III) donneront le potentiel V et les lignes de courant $\psi = \text{const.}$ dans la plaque. Dans chacun de ces cas, deux courants égaux entreront en A et B, et ils sortiront dans le premier cas par 1, 1', 1'', 1''', dans le deuxième, par 2 et 2'; dans le troisième, par 3.

Courants dans une plaque rectangulaire.

20. Un courant entre dans une plaque rectangulaire par le point P et sort par le point P'; de plus, P et P' sont symétriques par rapport à une des deux lignes moyennes du rectangle (*fig.* 17).

Prenons les axes de coordonnées parallèles aux côtés a et b du rectangle et leur origine au centre de la figure ; puis menons l'axe des y positifs du côté des points P et P'. Le potentiel V satisfait à l'intérieur du rectangle à l'équation

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} = 0$$

on a les conditions aux limites

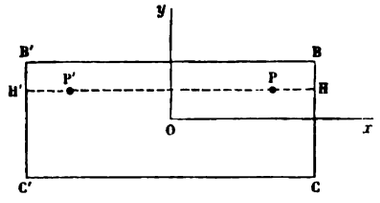
$$\frac{dV}{dx} = 0 \quad \text{pour } x = \pm\frac{a}{2},$$

$$\frac{dV}{dy} = 0 \quad \text{pour } y = \pm\frac{b}{2}.$$

Enfin V est infini comme $C \log r$ au point P ou (x', y') et il est infini comme $-C \log r$ au point P′ ou $(-x', y')$, r étant la distance à P ou P′.

Prolongeons la droite PP′ jusqu'aux points H et H′, où elle rencontre le périmètre du rectangle et désignons la fonction V par V_1 ou V_2,

Fig. 17.



suivant qu'elle appartient à un point de la bande HBB′H′ ou de la bande HCC′H′; V_1 et V_2 seront représentés par deux expressions différentes.

Posons d'abord

$$(\alpha, \qquad m = \frac{p\pi}{a},$$

p étant un nombre entier impair; puis, pour la bande HBB′H′, formons le potentiel en posant

$$V_1 = \sum_{p=1}^{\infty} f(y, y', m) \sin mx' \sin mx;$$

la dérivée de V_1 par rapport à x s'annulera ainsi pour $x = \pm \frac{a}{2}$. Ensuite $f(y, y', m)$ doit être, par rapport à y, de la forme

$$A e^{my} + B e^{-my},$$

et, comme la dérivée de V_1, par rapport à y, doit s'annuler pour $y = \frac{b}{2}$, on a

$$f(y, y', m) = \cosh m \left(\frac{b}{2} - y\right) \varphi(y').$$

D'après cela, on peut poser la première des deux formules

$$V_1 = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_1(y') \cosh m\left(\frac{b}{2} - y\right) \sin mx' \sin mx,$$

$$V_2 = \sum_{p=1}^{\infty} \varphi_2(y') \cosh m\left(\frac{b}{2} + y\right) \sin mx' \sin mx,$$

et l'on obtient de même la seconde.

21. Remarquons maintenant que la fonction V et sa dérivée par rapport à y doivent être continues le long de la droite HH'. Donc, pour $y = y'$, V_1 doit être égal à V_2 et $\frac{dV_1}{dy}$ égal à $\frac{dV_2}{dy}$. Nous satisfaisons à la première de ces deux conditions, en prenant

$$V_1 = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cosh m\left(\frac{b}{2} + y'\right) \cosh m\left(\frac{b}{2} - y\right) \sin mx' \sin mx,$$

$$V_2 = \sum_{p=1}^{\infty} A_p \cosh m\left(\frac{b}{2} - y'\right) \cosh m\left(\frac{b}{2} + y\right) \sin mx' \sin mx,$$

et nous déterminerons les coefficients A_p par la seconde condition.

Posons

$$\sin mx' \sin mx = T;$$

nous aurons

$$V_1 = \tfrac{1}{2} \Sigma A_p [\cosh m(b - y + y') + \cosh m(y + y')] T,$$
$$V_2 = \tfrac{1}{2} \Sigma A_p [\cosh m(b + y - y') + \cosh m(y + y')] T,$$

puis

$$\frac{dV_1}{dy} = \tfrac{1}{2} \Sigma m A_p [-\sinh m(b - y + y') + \sinh m(y + y')] T,$$

$$\frac{dV_2}{dy} = \tfrac{1}{2} \Sigma m A_p [\sinh m(b + y - y') + \sinh m(y + y')] T.$$

Supposons y très peu différent de y' et faisons, dans la première dérivée, $y = y' + \varepsilon$ et, dans la seconde, $y = y' - \varepsilon$; alors, en négligeant

une quantité évidemment nulle à la limite $\varepsilon = 0$, nous aurons

$$\frac{dV_2}{dy} - \frac{dV_1}{dy} = \Sigma m A_p \sinh m(b-\varepsilon) T.$$

Posons

$$m A_p = \frac{D}{\sinh mb},$$

D étant une constante, et nous aurons

$$\frac{dV_2}{dy} - \frac{dV_1}{dy} = D \sum \frac{\sinh m(b-\varepsilon)}{\sinh mb} T.$$

Or on a

$$\frac{\sinh m(b-\varepsilon)}{\sinh mb} = e^{-m\varepsilon} - \frac{2e^{-2mb}}{1-e^{-2mb}} \sinh m\varepsilon,$$

et il en résulte

$$\frac{dV_2}{dy} - \frac{dV_1}{dy} = \frac{D}{2} \Sigma e^{-m\varepsilon} [\cos m(x-x') - \cos m(x+x')] - 2D \sum \frac{e^{-2mb}}{1-e^{-2mb}} T \sinh m\varepsilon.$$

La seconde partie de cette expression est évidemment nulle pour $\varepsilon = 0$; la première partie l'est également. En effet, on a

$$e^{-\varepsilon} \cos\alpha + e^{-3\varepsilon} \cos 3\alpha + e^{-5\varepsilon} \cos 5\alpha + \ldots = \frac{1}{4} \frac{\sinh\varepsilon \cos 2\alpha}{\cosh 2\varepsilon - \cos 2\alpha},$$

expression qui tend vers zéro quand ε devient infiniment petit. Ainsi, à la limite $\varepsilon = 0$, on a

$$\frac{dV_2}{dy} = \frac{dV_1}{dy}$$

le long de la ligne HH'.

22. Vérifions ensuite que la fonction obtenue pour V devient infiniment grande comme $C \log r$ aux environs du point (x', y'). Posons

$$x = x' + \rho, \qquad y = y' + \varepsilon, \qquad r = \sqrt{\rho^2 + \varepsilon^2}$$

dans l'expression de V_1, en prenant ε positif; nous aurons

$$V_1 = \frac{D}{2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{m\sinh mb}[\cosh m(b-\varepsilon)+\cosh m(2y'+\varepsilon)]$$
$$\times \sin mx'(\sin mx'\cos m\rho+\cos mx'\sin m\rho).$$

En supprimant dans V_1 des parties qui, évidemment, ne peuvent devenir infinies, on a

$$V_1 = \frac{Da}{2\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}\frac{\cosh m(b-\varepsilon)}{\sinh mb}\sin^2 mx'\cos m\rho.$$

On a ensuite

$$\frac{\cosh m(b-\varepsilon)}{\sinh mb} = e^{-m\varepsilon}+\frac{e^{-mb}\cosh m\varepsilon}{\sinh mb},$$
$$\sin^2 mx' = \tfrac{1}{2}(1-\cos 2mx'),$$

et l'on peut de même réduire V_1 à

$$V_1 = \frac{Da}{4\pi}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{p}e^{-m\varepsilon}\cos m\rho,$$

où p a les valeurs 1, 3, 5, ...

On aura

$$\sum\frac{1}{p}e^{-m\varepsilon}\cos m\rho = e^{-\frac{\pi}{a}\varepsilon}\cos\frac{\pi\rho}{b}+\tfrac{1}{3}e^{-\frac{3\pi}{a}\varepsilon}\cos\frac{3\pi\rho}{b}+\ldots$$
$$= \tfrac{1}{4}\log\left(1+e^{-\frac{\pi\varepsilon}{a}-\frac{\pi\rho i}{a}}\right)-\tfrac{1}{4}\log\left(1-e^{-\frac{\pi\varepsilon}{a}-\frac{\pi\rho i}{a}}\right)$$
$$+\tfrac{1}{4}\log\left(1+e^{-\frac{\pi\varepsilon}{a}+\frac{\pi\rho i}{a}}\right)-\tfrac{1}{4}\log\left(1-e^{-\frac{\pi\varepsilon}{a}+\frac{\pi\rho i}{a}}\right).$$

Le premier et le troisième terme se réduisent à la limite chacun à $\frac{1}{4}\log 2$, et la somme des deux autres est

$$-\tfrac{1}{4}\log(\varepsilon^2+\rho^2)-\tfrac{1}{2}\log\frac{\pi}{a}.$$

Donc, en négligeant ce qui ne peut devenir infini, on voit que V_1 se

réduit, aux environs du point P, à

$$-\frac{Da}{8\pi}\log r.$$

Afin que V_1 se réduise en ce point à $C\log r$, il faut faire

$$D=-\frac{8\pi C}{a};$$

on a donc aussi

$$A_p=-\frac{8C}{p\sinh mb}.$$

On obtient donc enfin

$$V_1=-8C\sum\frac{1}{p}\frac{\cosh m\left(\frac{b}{2}-y\right)}{\sinh mb}\cosh m\left(\frac{b}{2}+y'\right)\sin mx\sin mx',$$

$$V_2=-8C\sum\frac{1}{p}\frac{\cosh m\left(\frac{b}{2}+y\right)}{\sinh mb}\cosh m\left(\frac{b}{2}-y'\right)\sin mx\sin mx',$$

m ayant la valeur (α) et les sommations s'étendant aux valeurs 1, 3, 5,.... jusqu'à l'infini du nombre p.

On obtient ensuite facilement les lignes de courant; elles sont données par l'équation $\psi=$ const. en prenant pour ψ l'une ou l'autre des expressions

$$\psi_1=\sum\frac{1}{p}\frac{\sinh m\left(\frac{b}{2}-y\right)}{\sinh mb}\cosh m\left(\frac{b}{2}+y'\right)\sin mx'\cos mx,$$

$$\psi_2=\sum\frac{1}{p}\frac{\sinh m\left(\frac{b}{2}+y\right)}{\sinh mb}\cosh m\left(\frac{b}{2}-y'\right)\sin mx'\cos mx,$$

suivant que y est plus grand ou plus petit que y'. Les sommes sont prises comme dans les formules précédentes.

23. Les séries qui donnent V_1 et V_2 sont faciles à calculer, pourvu que le point où l'on prend ces quantités ne soit pas très près de P ou P'. Indiquons comment on pourra calculer le potentiel pour un point très voisin de P ou P'.

Calculons V_1 aux environs de P en faisant, comme ci-dessus, $x=x'+\rho$, $y=y'+\varepsilon$; nous aurons

$$-\frac{1}{2C}V_1=\sum_1^\infty\frac{1}{p}e^{-m\varepsilon}\cos m\rho-\sum_1^\infty\frac{1}{p}e^{-m\varepsilon}\cos 2mx'$$
$$+2\sum_1^\infty\frac{1}{p}\frac{e^{-mb}\sin^2 mx'}{\sinh mb}+2\sum_1^\infty\frac{1}{p}\frac{\cosh 2my'}{\sinh mb}\sin^2 mx'$$

en négligeant des quantités très petites. On a ensuite

$$\sum\frac{1}{p}e^{-m\varepsilon}\cos m\rho=\tfrac{1}{4}\log\frac{\cosh\frac{\pi\varepsilon}{a}+\cos\frac{\pi\rho}{a}}{\cosh\frac{\pi\varepsilon}{a}-\cos\frac{\pi\rho}{a}}=\tfrac{1}{2}\log\frac{2a}{\pi r},$$

$$\sum\frac{1}{p}e^{-m\varepsilon}\cos 2mx'=\tfrac{1}{4}\log\frac{\cosh\frac{\pi\varepsilon}{a}+\cos\frac{2\pi x'}{a}}{\cosh\frac{\pi\varepsilon}{a}-\cos\frac{2\pi x'}{a}}=\tfrac{1}{2}\log\operatorname{tang}\frac{\pi x'}{a}$$

en négligeant encore de très petites quantités. On aura donc la formule

$$\frac{1}{C}V_1=\log\frac{\pi r}{2a}-\log\operatorname{tang}\frac{\pi x'}{a}$$
$$-4\sum_1^\infty\frac{1}{p}\frac{e^{-mb}\sin^2 mx'}{\sinh mb}-4\sum_1^\infty\frac{1}{p}\frac{\cosh 2my'}{\sinh mb}\sin^2 mx',$$

dont le premier terme n'est variable que par r et dont les trois autres termes sont indépendants de ε et ρ.

On obtiendrait exactement la même valeur pour V_2 aux environs du point P. Enfin V prend des valeurs égales et de signe contraire sur le cercle décrit du point P′ comme centre avec un rayon égal à r.

On peut calculer la résistance de cette plaque comme nous avons fait au n° 5. Supposons deux électrodes de rayon r dont les sections qui les terminent ont leurs centres en P et P′; la résistance sera

$$\frac{V_1-V_2}{I}=\frac{2V_1}{I}=-\frac{1}{\pi\times h}\frac{V_1}{C},$$

puisque $I=-2\pi\times hC$.

Courants dans un parallélépipède rectangle.

24. Nous considérons un parallélépipède rectangle limité par les plans

$$x = \pm\frac{a}{2}, \qquad y = \pm\frac{b}{2}, \qquad z = \pm\frac{c}{2}.$$

L'électricité entre dans ce corps par un point P et sort par un point P′ et nous supposons ces deux points symétriques par rapport au plan des zy. Soient (x', y', z') et $(-x', y', z')$ les coordonnées de P et P′. La fonction V satisfait à l'intérieur du corps à l'équation $\Delta V = 0$ et l'on a les conditions aux limites

$$\frac{dV}{dx} = 0 \qquad \text{pour } x = \pm\frac{a}{2},$$

$$\frac{dV}{dy} = 0 \qquad \text{pour } y = \pm\frac{b}{2},$$

$$\frac{dV}{dz} = 0 \qquad \text{pour } z = \pm\frac{c}{2}.$$

Enfin V est infini comme $\frac{C}{r}$ au point P et comme $-\frac{C}{r}$ au point P′, r étant la distance à P ou P′.

25. Avant de résoudre ce problème, considérons d'abord la fonction U de Green, qui satisfait à l'équation $\Delta U = 0$ à l'intérieur du parallélépipède, qui y est finie et continue ainsi que ses dérivées du premier ordre, excepté au point (x', y', z') où elle devient infinie comme $\frac{1}{r}$ et qui est nulle sur les six faces du corps.

Partageons le parallélépipède en deux parties par le plan $z = z'$ et désignons par U_1 et U_2 la fonction U suivant que z est plus grand ou plus petit que z'.

En général, si la fonction de Green est exprimée sous forme finie, elle ne change pas par la permutation de x, y, z avec x', y', z'. Mais, comme U doit être donné par deux séries distinctes suivant que z est plus grand ou plus petit que z', l'échange de x, y, z avec x', y', z' doit

permuter les expressions de U_1 et U_2 l'une dans l'autre. Nous sommes, d'après cela, conduit à poser

$$S = \sin\frac{p\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{q\pi}{b}\left(y-\frac{b}{2}\right)\sin\frac{p\pi}{a}\left(x'-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{q\pi}{b}\left(y'-\frac{b}{2}\right)$$

et à prendre

$$U_1 = \sum_p\sum_q f(z,z')S,$$

$$U_2 = \sum_p\sum_q f(z',z)S,$$

les deux signes sommatoires s'étendant à toutes les valeurs entières et positives de p et q.

De cette manière, les conditions aux limites sont satisfaites sur les plans $x = \pm\frac{a}{2}$, $y = \pm\frac{b}{2}$. Chaque terme de U_1 doit satisfaire à l'équation $\Delta U_1 = 0$ et doit s'annuler pour $z = \frac{c}{2}$; il en résulte qu'on a

$$f(z,z') = A_{p,q}\sinh m\left(\frac{c}{2}-z\right)\sinh m\left(\frac{c}{2}+z'\right),$$

où $A_{p,q}$ est un coefficient constant et où

$$m = \pi\sqrt{\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}}.$$

Pour déterminer le coefficient $A_{p,q}$ considérons la fonction

$$(\alpha) \qquad u = \sinh m\left(\frac{c}{2}+z\right)\sin\frac{p\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{q\pi}{b}\left(y-\frac{b}{2}\right),$$

qui satisfait à l'équation $\Delta u = 0$ et qui s'annule sur toutes les faces du parallélépipède, excepté sur la face $z = \frac{c}{2}$. Soit $d\sigma$ un élément de la surface de ce prisme; d'après un théorème connu (*Théorie du potentiel*, Ire Partie, Chap. II, n° 18), on a

$$u = \frac{1}{4\pi}\int u\frac{dU}{dn}d\sigma,$$

dn étant l'élément de normale à la surface, mené intérieurement, et l'intégrale s'étendant à tous les éléments de la surface. Il en résulte

$$(\beta) \qquad u = -\frac{1}{4\pi}\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}}\left(u\frac{dU_1}{dz}\right)_{z=\frac{c}{2}}dx\,dy.$$

Pour $z=\frac{c}{2}$, on a

$$u = \sinh mc \sin\frac{p\pi}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{q\pi}{b}\left(y-\frac{b}{2}\right),$$

$$\frac{dU_1}{dz} = -\sum_p\sum_q A_{p,q}\, m \sinh m\left(\frac{c}{2}+z'\right)S.$$

Substituons ces expressions dans (β) et ne conservons que le terme qui n'est pas nul; il restera

$$u = \frac{ab}{16\pi}A_{p,q}\, m \sinh mc \sinh m\left(\frac{c}{2}+z'\right)\sin\frac{p\pi}{a}\left(x'-\frac{a}{2}\right)\sin\frac{q\pi}{b}\left(y'-\frac{b}{2}\right).$$

Supprimons les accents de cette formule et identifions-la avec (α); nous obtiendrons

$$A_{p,q} = \frac{16\pi}{mab\sinh mc}.$$

D'après cela, nous avons

$$U_1 = \frac{16}{ab}\sum_p\sum_q \frac{\pi}{m\sinh mc}\sinh m\left(\frac{c}{2}-z\right)\sinh m\left(\frac{c}{2}+z'\right)S,$$

$$U_2 = \frac{16}{ab}\sum_p\sum_q \frac{\pi}{m\sinh mc}\sinh m\left(\frac{c}{2}+z\right)\sinh m\left(\frac{c}{2}-z'\right)S,$$

où les signes sommatoires se rapportent à toutes les valeurs entières et positives de p et q.

26. Faisons dans U_1

$$z = z'+\varepsilon, \qquad x = x'+\alpha, \qquad y = y'+\beta,$$

ε, α, β étant très petits et ε étant de plus positif. Nous aurons

$$U_1 = \frac{8}{ab} \sum_p \sum_q \frac{\pi}{m \sinh mc} [\cosh m(c-\varepsilon) - \cosh m(2z'+\varepsilon)].S,$$

ou, en supprimant une partie qui ne peut devenir infinie,

$$U_1 = \frac{8}{ab} \sum_p \sum_q \frac{\pi}{m \sinh mc} \cosh m(c-\varepsilon).S.$$

Remplaçons le produit des premier et troisième facteurs de S et celui des deuxième et quatrième facteurs par une différence de cosinus; puis supprimons encore ce qui ne peut rien donner d'infini dans U_1, et il nous restera

$$U_1 = \frac{2\pi}{ab} \sum_p \sum_q \frac{\cosh m(c-\varepsilon)}{m \sinh mc} \cos\frac{p\pi\alpha}{a} \cos\frac{q\pi\beta}{b}.$$

Enfin, pour une raison semblable, on peut réduire cette expression à

$$(\gamma) \qquad U_1 = \frac{2\pi}{ab} \sum_p \sum_q \frac{1}{m} e^{-m\varepsilon} \cos\frac{p\pi\alpha}{a} \cos\frac{q\pi\beta}{b}.$$

La fonction U a pour valeur $\frac{1}{r}$ aux environs du point (x', y', z'). Donc l'expression (γ), dans laquelle les sommations s'étendent à toutes les valeurs entières et positives de p et q et où

$$m = \pi \sqrt{\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2}}$$

se réduit à

$$(\delta) \qquad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon^2 + \alpha^2 + \beta^2}},$$

quand ε, α, β sont infiniment petits et ε positif.

Si dans (γ) on change α en $\alpha + a$, on a l'expression

$$\frac{2\pi}{ab} \sum_p \sum_q \frac{1}{m} e^{-m\varepsilon} \cos\frac{p\pi(\alpha+a)}{a} \cos\frac{q\pi\beta}{b},$$

et quand on y fait $p = 1, 2, 3, \ldots$, on obtient des termes alternativement positifs et négatifs : il est donc aisé de voir que cette série double a une valeur finie. On peut donc, d'après cela, retrancher cette série de (γ) sans changer sa partie infiniment grande; il en résulte que l'expression

$$(\eta) \qquad \frac{4\pi}{ab}\sum_p\sum_q \frac{1}{m} e^{-m\varepsilon} \cos\frac{p\pi\alpha}{a}\cos\frac{q\pi\beta}{b},$$

où q prend encore toutes les valeurs $1, 2, 3, 4, \ldots$ jusqu'à l'infini, mais p seulement les valeurs impaires $1, 3, 5, \ldots$, a encore pour valeur l'expression (δ).

27. Revenons maintenant au problème que nous nous sommes d'abord proposé. Désignons par V_1 et V_2 la fonction V, suivant que z sera plus grand ou plus petit que z', et représentons par m la même quantité que ci-dessus; puis prenons pour V_1 et V_2 les expressions suivantes :

$$V_1 = \sum_p\sum_q B_{p,q} \cosh m\left(\frac{c}{2} - z\right)\cosh m\left(\frac{c}{2} + z'\right) T,$$

$$V_2 = \sum_p\sum_q B_{p,q} \cosh m\left(\frac{c}{2} + z\right)\cosh m\left(\frac{c}{2} - z'\right) T,$$

en faisant

$$T = \cos\frac{q\pi}{b}\left(y - \frac{b}{2}\right)\cos\frac{q\pi}{b}\left(y' - \frac{b}{2}\right)\sin\frac{p\pi x}{a}\sin\frac{p\pi x'}{a};$$

les signes de sommation s'étendent à toutes les valeurs entières et positives de q, mais seulement aux valeurs positives et impaires de p. Ces expressions de V_1 et V_2 satisferont aux conditions aux limites.

On voit que l'expression de V_2 est égale à celle de V_1 pour $z = z'$; mais il faut encore que l'on ait

$$\frac{dV_2}{dz} = \frac{dV_1}{dz} \qquad \text{pour } z = z',$$

et l'on pourra vérifier qu'on satisfait à cette condition en posant

$$B_{p,q} = \frac{D}{m \sinh mc},$$

où D a la même valeur pour tous les coefficients.

Cherchons la constante D. Faisons dans V_1

$$z = z' + \varepsilon, \qquad x = x' + \alpha, \qquad y = y' + \beta,$$

ε, α, β étant très petits; nous aurons

$$V_1 = \frac{D}{2} \sum_p \sum_q \frac{1}{m \sinh mc} \left[\cosh m(c - \varepsilon) + \cosh m(2z' + \varepsilon) \right] T.$$

On peut supprimer le second coshyp sans modifier la partie infinie de V_1, et de même on peut réduire T à

$$\tfrac{1}{4} \cos \frac{p\pi\alpha}{a} \cos \frac{q\pi\beta}{b}.$$

Ainsi l'on a

$$V_1 = \tfrac{1}{8} D \sum_p \sum_q \frac{1}{m} \frac{\cosh m(c - \varepsilon)}{\sinh m\varepsilon} \cos \frac{p\pi\alpha}{a} \cos \frac{q\pi\beta}{b}$$

ou encore

$$V_1 = \tfrac{1}{8} D \sum_p \sum_q \frac{1}{m} e^{-m\varepsilon} \cos \frac{p\pi\alpha}{a} \cos \frac{q\pi\beta}{b},$$

où p a des valeurs impaires seulement. Cette expression doit se réduire à $\frac{C}{r}$ et, comme l'expression (η) se réduit à $\frac{1}{r}$, nous en concluons

$$D = \frac{32\pi}{ab} C.$$

Donc nous avons en définitive

$$V_1 = \frac{32\pi}{ab} C \sum_p \sum_q \frac{1}{m} \frac{\cosh m\left(\frac{c}{2} - z\right) \cosh m\left(\frac{c}{2} + z'\right)}{\sinh mc} T,$$

$$V_2 = \frac{32\pi}{ab} C \sum_p \sum_q \frac{1}{m} \frac{\cosh m\left(\frac{c}{2} + z\right) \cosh m\left(\frac{c}{2} - z'\right)}{\sinh mc} T,$$

q ayant toutes les valeurs entières positives et p toutes les valeurs positives impaires.

Ces deux formules proviennent de la division du parallélépipède rectangle par le plan $z = z'$. On pourrait représenter la fonction V d'une seconde manière en partageant le parallélépipède par le plan $y = y'$, et l'on aurait deux formules entièrement semblables aux deux précédentes. En égalant les valeurs de V déterminées des deux manières, on obtient quatre formules de transformation de séries qui sont très remarquables.

Faisons aussi observer que, si les deux points P et P′ sont situés sur la face $z = \frac{c}{2}$, l'espace relatif à V_1 s'annule et il n'y a plus qu'une formule pour représenter le potentiel V

$$V = \frac{32\pi}{ab} C \sum_p \sum_q \frac{1}{m} \frac{\cosh m\left(\frac{c}{2} + z\right)}{\sinh mc} T.$$

28. Si les deux points P et P′ sont situés aux centres des faces $x = \pm \frac{a}{2}$, on fera $y' = 0$, $z' = 0$, $x' = \frac{a}{2}$ et l'on aura

$$V_1 = \frac{16\pi}{ab} C \sum_p \sum_q \pm \frac{1}{m} \frac{\cosh m\left(\frac{c}{2} - z\right)}{\sinh \frac{mc}{2}} \cos \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{p\pi x}{a},$$

$$V_2 = \frac{16\pi}{ab} C \sum_q \sum_p \pm \frac{1}{m} \frac{\cosh m\left(\frac{c}{2} + z\right)}{\sinh \frac{mc}{2}} \cos \frac{q\pi y}{b} \sin \frac{p\pi x}{a},$$

où le signe de sommation relatif à p s'étend à toutes les valeurs impaires et positives de p et le signe relatif à q à toutes les valeurs paires et positives de q; on prendra en outre chaque terme avec le signe + ou − suivant que p est de la forme $4n + 1$ ou $4n + 3$.

Calculons le potentiel V aux environs du point P dans ce cas particulier. Faisons dans V_1

$$x = \frac{a}{2} - \alpha, \qquad y = \beta, \qquad z = \varepsilon,$$

α, β, ε étant extrêmement petits et ε, α étant positifs; nous aurons

$$V_1 = \frac{16\pi C}{ab} \sum_p \sum_q \frac{1}{m} \frac{\cosh m\left(\frac{c}{2} - \varepsilon\right)}{\sinh \frac{mc}{2}} \cos \frac{p\pi\alpha}{a} \cos \frac{q\pi\beta}{b}.$$

En appliquant la formule

$$\frac{\cosh m\left(\frac{c}{2} - \varepsilon\right)}{\sinh \frac{mc}{2}} = e^{-m\varepsilon} + e^{-\frac{mc}{2}} \frac{\cosh m\varepsilon}{\sinh \frac{mc}{2}},$$

nous obtenons

$$V_1 = \frac{16\pi C}{ab} \sum\sum \frac{1}{m} e^{-m\varepsilon} \cos \frac{p\pi\alpha}{a} \cos \frac{q\pi\beta}{b} + \frac{16\pi C}{ab} \sum\sum \frac{1}{m} e^{-\frac{mc}{2}} \frac{\cosh m\varepsilon}{\sinh \frac{mc}{2}}$$

ou, en négligeant des quantités de l'ordre de ε, α et β,

$$V_1 = \frac{4C}{r} + \frac{16\pi C}{ab} \sum\sum \frac{1}{m} \frac{e^{-\frac{mc}{2}}}{\sinh \frac{mc}{2}}.$$

V_2 est fourni par la même expression. Or le dernier terme est indépendant de ε, α, β; il en résulte que la valeur de V est la même sur tout l'hémisphère situé dans le parallélépipède et décrit du point P comme centre avec le rayon r.

CHAPITRE VI.

PROBLÈMES PARTICULIERS RELATIFS A DES COURANTS D'INDUCTION PRODUITS DANS DES PLAQUES OU DES CONDUCTEURS DE RÉVOLUTION.

Dans les Chapitres précédents, nous avons étudié d'abord les actions des courants linéaires, puis nous nous sommes occupé des courants permanents dans des conducteurs de forme quelconque. On pourrait maintenant chercher à exposer une théorie générale des courants variables dans des conducteurs de forme quelconque. Mais nous préférons remettre à plus loin cette théorie qui exige quelques principes nouveaux, et nous allons exposer quelques cas d'induction dans des plaques et des conducteurs de révolution, qui peuvent être traités par les seuls principes des Chapitres précédents.

Courants permanents produits par induction dans une plaque courbe.

1. Nous avons vu, dans le Chapitre V (n°s 11-14), comment on trace, sur la surface d'une plaque courbe, d'épaisseur infiniment petite et constante, deux systèmes de lignes orthogonales entre elles, de manière que l'un de ces systèmes puisse représenter des lignes équipotentielles et l'autre des lignes de courants.

Si ces lignes de courants, quoique permanentes, sont produites par induction, elles seront, en général, fermées et ne se couperont pas mutuellement.

Les lignes de courants étant données par l'équation

$$\alpha = \text{const.},$$

traçons une série de ces lignes obtenues en faisant varier α par degrés infiniment petits. Désignons par ds la longueur d'un élément d'une

ligne équipotentielle ; on peut choisir la fonction α, de manière que la quantité d'électricité qui traverse ds soit représentée par $\frac{d\alpha}{ds} ds$ (Chap. V, n° 11) ; cette quantité demeure constante entre deux lignes α et $\alpha + d\alpha$, séparées par la distance variable ds. Ainsi la portion annulaire A de la plaque comprise entre les deux lignes α et $\alpha + d\alpha$ peut être assimilée à un courant linéaire ; son effet magnétique est donc le même que celui d'une double couche magnétique A′ dont la puissance est $d\alpha$ et qui coïncide avec la partie de la plaque renfermée dans la courbe α (Chap. II, n° 13).

On peut en dire autant de chaque anneau de courant extérieur à A. Donc l'anneau A de courant peut être remplacé, quant à son action extérieure, par la différentielle de la somme de toutes les couches magnétiques superposées, correspondant à ces différents anneaux de courant. Ainsi, comme la puissance magnétique de A′ est $d\alpha$, la puissance magnétique totale de toutes ces couches en un point de l'anneau A est $\alpha + C$, C étant une constante. Les anneaux de courants intérieurs à A ne modifieront pas la puissance magnétique sur A. Donc enfin tous les courants de la plaque peuvent être remplacés par une couche magnétique qui coïncide avec la plaque et dont la puissance est $\alpha + C$ en chaque point.

Sur le contour de la plaque, la puissance magnétique est nulle ; la valeur de C est donc égale à la valeur de α sur ce contour, prise avec un signe contraire.

2. D'après la formule connue pour le potentiel d'une double couche magnétique, si nous remplaçons $\alpha + C$ par p, nous avons, pour le potentiel magnétique de la couche de courants, en un point extérieur,

$$P = \int \frac{p}{r^2} \cos(r, n)\, d\sigma,$$

où r est la distance du point donné à l'élément $d\sigma$ de la surface moyenne de la plaque et n la normale menée du côté positif de la couche, et où l'intégrale s'étend à tous les éléments $d\sigma$. (*Théorie du potentiel*, IIe Partie, Chap. IV, n° 11).

D'après ce que l'on sait sur les couches magnétiques, la fonction P

varie d'une manière discontinue à travers la plaque. Désignons par P et P′ les valeurs de P sur les faces positive et négative ; nous aurons

$$P = P' + 4\pi p.$$

Mais la composante normale à la plaque de la force magnétique varie d'une manière continue à travers la plaque.

Supposons ensuite la plaque plane et traçons les axes rectangulaires des x, y dans son plan moyen. Désignons, comme au n° 11 du Chapitre V, par

$$\beta = \text{const.}$$

les lignes d'égal potentiel. La quantité d'électricité qui traverse un élément ds d'une de ces lignes est $\frac{d\alpha}{ds}ds$ ou $\frac{dp}{ds}ds$; ainsi le courant, pris pour l'épaisseur de la plaque, est

$$\frac{dp}{ds} = H\frac{dp}{d\alpha} = H,$$

en posant

$$H = \sqrt{\left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\beta}{dy}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d\alpha}{dx}\right)^2 + \left(\frac{d\alpha}{dy}\right)^2}.$$

On aura les composantes du courant, pris dans toute l'épaisseur de la plaque, en multipliant $\frac{dp}{ds}$ par les cosinus des angles du courant avec les axes des x et y; ces cosinus sont

$$-\frac{1}{H}\frac{d\beta}{dx} = \frac{1}{H}\frac{d\alpha}{dy}, \qquad -\frac{1}{H}\frac{d\beta}{dy} = -\frac{1}{H}\frac{d\alpha}{dx};$$

on obtient donc pour ces deux composantes u, v respectivement $\frac{d\alpha}{dy}$ et $-\frac{d\alpha}{dx}$, et l'on a ces deux équations

$$u = \frac{dp}{dx}, \qquad v = -\frac{dp}{dy}.$$

Plaque plane traversée par des courants induits variables.

3. Nous venons de voir que l'action magnétique extérieure d'une plaque traversée par des courants induits est égale à celle d'une

couche magnétique dont nous avons désigné la puissance par p. Supposons la plaque plane et posons

$$\Pi = \int \frac{p}{r} d\sigma.$$

Π représente donc le potentiel d'une couche de matière distribuée sur la surface σ avec la densité p, et le potentiel de la couche magnétique a pour expression

$$P = \int \frac{p}{r^2} \cos(r, dz)\, d\sigma = -\frac{d\Pi}{dz}.$$

Π est une fonction paire en z, P une fonction impaire. La différence des valeurs de P sur les deux faces de la plaque étant égale à $4\pi p$, on a donc

$$\begin{aligned} P &= \quad 2\pi p \quad \text{sur la face positive} \\ &= -2\pi p \quad \text{sur la face négative.} \end{aligned}$$

Soient X, Y, Z les composantes de la force magnétique; nous aurons

$$Z = -\frac{dP}{dz} = \frac{d^2\Pi}{dz^2},$$

et Z possède la même valeur sur les deux faces de la plaque.

Désignons par X_1, Y_1 les valeurs de X, Y sur la face négative de la plaque; nous aurons sur les deux faces

$$X = -\frac{dP}{dx} = -2\pi \frac{dp}{dx}, \qquad X_1 = -X,$$

$$Y = -\frac{dP}{dy} = -2\pi \frac{dp}{dy}, \qquad Y_1 = -Y.$$

D'une manière générale, nous avons

$$(1) \qquad X = \frac{d^2\Pi}{dx\,dz}, \qquad Y = \frac{d^2\Pi}{dy\,dz}, \qquad Z = \frac{d^2\Pi}{dz^2},$$

et si, introduisant trois fonctions nouvelles $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$, nous posons

$$X = \frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz}, \qquad Y = \frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx}, \qquad Z = \frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy},$$

nous aurons ces trois équations

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz} = \frac{d^2\Pi}{dx\,dz},$$
$$\frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx} = \frac{d^2\Pi}{dy\,dz},$$
$$\frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy} = \frac{d^2\Pi}{dz^2} = -\frac{d^2\Pi}{dx^2} - \frac{d^2\Pi}{dy^2},$$

et nous y satisferons en posant

$$\mathfrak{F} = \frac{d\Pi}{dy}, \qquad \mathfrak{G} = -\frac{d\Pi}{dx}, \qquad \mathfrak{H} = 0.$$

4. Il est facile de vérifier que $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ auront les valeurs données au Chap. IV, n° 6.

En effet, nous avons trouvé ci dessus (n° 2)

$$u = \frac{dp}{dy}, \qquad v = -\frac{dp}{dx};$$

désignons par ε l'épaisseur de la plaque et posons

$$u = u_1\varepsilon, \qquad v = v_1\varepsilon, \qquad p = p_1\varepsilon;$$

u_1, v_1 sont les composantes du courant qui traverse normalement l'unité de surface, p_1 est la densité de la plaque dont le potentiel est Π, et nous aurons

$$\Delta\Pi = -4\pi p_1;$$

il en résulte

$$u_1 = \frac{dp_1}{dy} = -\frac{1}{4\pi}\Delta\frac{d\Pi}{dy} = -\frac{1}{4\pi}\Delta\mathfrak{F},$$

ou

$$\Delta\mathfrak{F} = -4\pi u_1;$$

donc, en désignant par $d\varpi$ l'élément de volume de la plaque, nous aurons la première des deux équations semblables

$$\mathfrak{F} = \int\frac{u_1}{r}d\varpi = \int\frac{u}{r}d\sigma,$$
$$\mathfrak{G} = \int\frac{v_1}{r}d\varpi = \int\frac{v}{r}d\sigma,$$

et, comme la composante w du courant suivant l'axe de z est nulle, on peut aussi poser

$$\mathcal{S} = \int \frac{w}{r} d\sigma = 0.$$

5. Supposons ensuite que, outre les courants qui traversent la plaque B située dans le plan des x, y, on ait encore une couche magnétique ou une couche de courants parallèle au plan des x, y. Nous concevrons que cette seconde couche C se meuve parallèlement à elle-même.

Désignons par Π' le potentiel analogue à Π et dû à la plaque C; nous aurons, pour le potentiel magnétique de cette plaque,

$$P' = -\frac{d\Pi'}{dz},$$

et, si l'on désigne par $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{S}'$ ce que deviennent $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{S}$ pour la plaque C, on obtient

$$\mathcal{F}' = \frac{d\Pi'}{dy}, \qquad \mathcal{G}' = -\frac{d\Pi'}{dx}, \qquad \mathcal{S}' = 0.$$

6. Admettons que la plaque B demeure fixe et désignons par R la résistance spécifique de la matière de la plaque divisée par son épaisseur. D'après ce que nous avons vu (Chap. III, nos 14 et 20), les composantes de la force électromotrice d'induction sur un courant linéaire de cette plaque sont, suivant les axes des x et y,

$$-\frac{d}{dt}(\mathcal{F} + \mathcal{F}'), \qquad -\frac{d}{dt}(\mathcal{G} + \mathcal{G}');$$

ajoutons-y les composantes

$$-\frac{d\varphi}{dx}, \quad -\frac{d\varphi}{dy}$$

de la force électromotrice provenant de l'électricité libre et de l'électricité de la double couche située sur les faces de la plaque dont le po-

tentiel est φ; nous aurons

$$(2)\qquad \begin{cases} \mathrm{R}u = -\dfrac{d}{dt}(\mathfrak{f}+\mathfrak{f}') - \dfrac{d\varphi}{dx}, \\ \mathrm{R}v = -\dfrac{d}{dt}(\mathfrak{g}+\mathfrak{g}') - \dfrac{d\varphi}{dy}. \end{cases}$$

Sur la face positive de la plaque on a (n° 3)

$$2\pi p = -\frac{d\Pi}{\partial z},$$

et par suite, en prenant Π sur le côté positif, on a

$$(3)\qquad u = -\frac{1}{2\pi}\frac{d^2\Pi}{dy\,dz}, \qquad v = \frac{1}{2\pi}\frac{d^2\Pi}{dx\,dz};$$

donc les équations (2) deviennent

$$(4)\qquad \begin{cases} -\dfrac{\mathrm{R}}{2\pi}\dfrac{d^2\Pi}{dy\,dz} = -\dfrac{d^2}{dy\,dt}(\Pi+\Pi') - \dfrac{d\varphi}{dx}, \\ \dfrac{\mathrm{R}}{2\pi}\dfrac{d^2\Pi}{dx\,dz} = \dfrac{d^2}{dx\,dt}(\Pi+\Pi') - \dfrac{d\varphi}{dy}. \end{cases}$$

Différentions ces deux équations respectivement par rapport à x et à y et ajoutons; nous aurons

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0.$$

Sur le bord de la plaque, p est nul et l'on a la condition

$$(5)\qquad \frac{d\Pi}{dz} = 0.$$

Ensuite, comme les courants ne traversent pas le bord, on a aussi sur ce bord

$$\frac{d^2\Pi}{dy\,dz}\cos\lambda - \frac{d^2\Pi}{dx\,dz}\sin\lambda = 0,$$

en désignant par λ l'angle de la normale avec l'axe des x, et cette équation peut s'écrire

$$\frac{d^2\Pi}{ds\,dz} = 0,$$

en désignant par ds un élément du contour de la plaque. Mais cette condition rentre dans (5).

7. Supposons maintenant que la plaque soit infinie dans tous les sens. La fonction φ, étant finie et continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre dans tout le plan des xy, se réduira à zéro. Posons

$$\frac{R}{2\pi} = h,$$

et intégrons les deux équations (4) où φ est nul; nous aurons

$$h\frac{d\Pi}{dz} - \frac{d\Pi}{dt} - \frac{d\Pi'}{dt} = \chi(z, t),$$

$\chi(z, t)$ étant une fonction arbitraire. Mais nous allons voir que la fonction $\chi(z, t)$ doit être supprimée, et cette équation se trouve ainsi réduite à

$$h\frac{d\Pi}{dz} - \frac{d\Pi}{dt} - \frac{d\Pi'}{dt} = 0. \tag{6}$$

Le problème précédent est ainsi exposé dans le *Traité d'électricité* de MAXWELL; mais nous traiterons l'intégration d'une manière toute différente de celle qui se trouve dans cet Ouvrage.

8. S'il n'y a pas de force inductrice extérieure agissant sur la plaque B, on aura $\Pi' = 0$ et

$$h\frac{d\Pi}{dz} = \frac{d\Pi}{dt}. \tag{7}$$

C'est le cas d'un système de courants de la plaque abandonné à lui-même, qui s'affaiblit par l'effet de la résistance. On aura, en intégrant cette équation,

$$\Pi = f(x, y, z + ht). \tag{8}$$

L'équation (7) est démontrée pour $z = 0$. Mais, en considérant la plaque comme ayant une épaisseur très petite ε, Π et $\frac{d\Pi}{dz}$ ont la même

valeur de part et d'autre de la face positive de la plaque. Les deux équations (7) et (8) sont donc vraies pour z très petit positif. D'ailleurs Π, au-dessus du plan des x, y, satisfait à l'équation $\Delta\Pi = 0$, est fini et continu, ainsi que ses dérivées du premier ordre et s'annule à l'infini. On en conclut que, pour toute valeur positive de z, Π est représenté par la formule (8), où $f(x, y, z)$ est une fonction qui satisfait aux conditions précédentes de continuité et à l'équation

$$\Delta f = 0. \tag{9}$$

Les composantes de la force magnétique en un point (x, y, z) sont données par les formules (1). Si donc on fait passer un système de courants à travers une plaque d'étendue infinie et qu'on l'abandonne ensuite à lui-même, son effet magnétique du côté des z positifs sera le même que si le système de courants avait été maintenu constant et que la plaque eût été mise en mouvement dans la direction des z négatifs et avec une vitesse égale à h.

Prouvons maintenant qu'il n'y avait pas lieu d'ajouter la fonction arbitraire $\chi(z, t)$ au second membre de l'équation (7). En effet, comme cette équation convient à tout l'espace situé au-dessus du plan des x, y, en prenant le Δ des deux membres, nous aurions eu $\Delta\chi = 0$ et par suite $\chi = Az + B$, A et B étant indépendants de x, y, z, et cette fonction ne modifierait pas les valeurs que nous avons trouvées pour u, v et X, Y, Z.

Remarquons que u, v, X, Y, Z s'expriment au moyen de P par les formules

$$u = \frac{1}{2\pi}\frac{dP}{dy}, \qquad v = -\frac{1}{2\pi}\frac{dP}{dx},$$

$$X = -\frac{dP}{dx}, \qquad Y = -\frac{dP}{dy}, \qquad Z = -\frac{dP}{dz}.$$

Ainsi Π n'entre que par $\frac{d\Pi}{dz} = -P$ dans les expressions de u, v, X, Y, Z et la fonction P satisfait aussi à l'équation (7), en sorte qu'on peut poser au lieu de (8)

$$P = f(x, y, z + ht),$$

$f(x, y, z)$ étant encore une fonction qui satisfait à l'équation (9). Dé-

signons par $F(x, y)$ la valeur de P sur le plan des xy pour $t = 0$; cette valeur se déduira facilement de l'état donné des courants à l'instant initial. Posons

$$f = He^{-mz},$$

nous aurons l'équation

$$\frac{d^2H}{dx^2} + \frac{d^2H}{dy^2} + m^2H = 0,$$

qui est satisfaisante en posant

$$H = A\cos p(x-\alpha)\cos q(y-\beta), \qquad m^2 = p^2 + q^2;$$

on en conclut la solution particulière

$$f = A\cos p(x-\alpha)\cos q(y-\beta)e^{-z\sqrt{p^2+q^2}},$$

puis la solution générale

$$f = \frac{1}{4\pi^2}\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha,\beta)\cos p(x-\alpha)\cos q(y-\beta)e^{-z\sqrt{p^2+q^2}}\,dp\,dq\,d\alpha\,d\beta.$$

Pour $z = 0$, cette fonction se réduira à $F(x, y)$. Enfin on aura pour z positif

$$P = \frac{1}{4\pi^2}\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha,\beta)\cos p(x-\alpha)\cos q(y-\beta)e^{-(z+kt)\sqrt{p^2+q^2}}\,dp\,dq\,d\alpha\,d\beta.$$

Nous avons vu (n° 3) que la fonction P est impaire en z; on obtiendra donc la valeur de P du côté des z négatifs en remplaçant z par $-z$ et en changeant le signe de l'expression.

9. Revenons à la supposition d'un système de courants induits dans la plaque indéfinie B par des courants situés dans la plaque parallèle C que nous mettons du côté des z négatifs. On voit, comme ci-dessus, que l'équation (6) a lieu dans tout l'espace situé au-dessus du plan des xy et qu'on pouvait faire effectivement $\chi(z, t) = 0$.

En différentiant l'équation (6) par rapport à z, nous remplacerons

dans cette équation les fonctions Π et Π′ par les potentiels magnétiques P et P′; ce qui donne l'équation

$$(a) \qquad h\frac{d\mathrm{P}}{dz} - \frac{d\mathrm{P}}{dt} = \frac{d\mathrm{P}'}{dt},$$

où P′ est une fonction donnée $f(x, y, z, t)$ qui provient de l'action des courants inducteurs. On néglige ainsi l'action des courants induits par B sur la plaque C.

Nous ferons commencer l'induction au temps $t = 0$.

Pour intégrer l'équation aux différences partielles (a), qui est linéaire et du premier ordre, on commence par considérer les équations différentielles simultanées

$$\frac{dz}{h} = -dt = \frac{d\mathrm{P}}{\dfrac{df(x, y, z, t)}{dt}}.$$

On en tire, en désignant par C une constante arbitraire,

$$z + ht = \mathrm{C},$$

$$d\mathrm{P} = -\frac{df(x, y, z, t)}{dt}\,dt.$$

La dérivée par rapport à t est une dérivée partielle et l'on peut écrire

$$d\mathrm{P} = \frac{df(x, y, z, t-\varepsilon)}{d\varepsilon}\,dt \qquad \text{pour} \qquad \varepsilon = 0.$$

Pour intégrer cette expression, il faut d'abord y remplacer z par $\mathrm{C} - ht$; ce qui donne

$$d\mathrm{P} = \frac{df(x, y, \mathrm{C} - ht, t-\varepsilon)}{d\varepsilon}\,dt,$$

et, si nous supposons que P soit nul pour $t = 0$, nous aurons

$$\mathrm{P} = \int_0^t \frac{df(x, y, \mathrm{C} - ht, t-\varepsilon)}{d\varepsilon}\,dt.$$

Changeons la lettre t en τ sous le signe d'intégration et la formule

devient

$$P = \int_0^t \frac{df(x, y, C - h\tau, \tau - \varepsilon)}{d\varepsilon} d\tau;$$

nous pouvons maintenant en éliminer C et y faire

$$C = z + ht;$$

ce qui nous donnera

$$P = \int_0^t \frac{df[x, y, z + h(t-\tau), \tau - \varepsilon]}{d\varepsilon} d\tau.$$

A la variable τ substituons la variable υ, en posant

$$t - \tau = \upsilon, \qquad d\tau = -d\upsilon,$$

et nous aurons

$$P = \int_0^t \frac{df(x, y, z + h\upsilon, t - \upsilon - \varepsilon)}{d\varepsilon} d\upsilon.$$

On a maintenant l'avantage de pouvoir supprimer la quantité ε qu'il faut faire nulle après la dérivation; il suffit de remplacer la dérivation par rapport à ε par une autre par rapport à t; on a ainsi

$$(b) \qquad P = -\int_0^t \frac{df(x, y, z + h\upsilon, t - \upsilon)}{dt} d\upsilon.$$

Pour avoir la solution la plus générale de l'équation (a), il faudrait ajouter à cette valeur de P l'expression $F(x, y, z + ht)$, où F est une fonction arbitraire de trois variables; mais, comme P est nul par hypothèse pour $t = 0$, la fonction $F(x, y, z)$ est nulle et P se réduit à (b).

La formule (b) est relative au côté positif de la plaque; on aurait la valeur de P du côté des z négatifs en remplaçant dans cette formule z par $-z$, et changeant le signe de l'expression.

La fonction P′ ou $f(x, y, z, t)$ n'est pas arbitraire; car elle satisfait à l'équation $\Delta f = 0$. Elle provient de la plaque C située du côté des z négatifs; représentons par

$$z = -l$$

son plan moyen. Si la plaque C est aussi indéfinie, désignons par $F(x, y, t)$ la valeur de f sur le plan $z = -l$, valeur qui se déduira de la connaissance des courants situés dans cette plaque, et nous aurons au-dessus de ce plan

$$f = \frac{1}{4\pi^2}\int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} F(\alpha, \beta, t)\cos p(x-\alpha)\cos q(y-\beta)\, e^{-(z+l)\sqrt{p^2+q^2}}\, dp\, dq\, d\alpha\, d\beta,$$

d'après le calcul du n° 8. Ensuite, d'après la formule (b), on aura pour P du côté des z positifs

$$P = \frac{-1}{4\pi^2}\int_0^t d\upsilon \int\int\int\int_{-\infty}^{\infty} \left\{\frac{d}{dt}\left[F(\alpha, \beta, t-\upsilon)\, e^{-(z+h\upsilon+l)\sqrt{p^2+q^2}}\right] \times \cos p(x-\alpha)\cos q(y-\beta)\, dp\, dq\, d\alpha\, d\beta\right\}.$$

Si l est une fonction de t, $\chi(t)$, il faudra remplacer dans cette formule l par $\chi(t-\upsilon)$.

Plaque circulaire tournant autour de son axe et induite par des aimants.

10. Si un disque métallique est mis en mouvement autour de son axe, en même temps qu'un aimant se trouve placé parallèlement à une petite distance au-dessus du disque et mobile autour du même axe, l'aimant subit une action qui tend à lui faire suivre le mouvement du disque.

Ce phénomène, observé d'abord par Arago, provient des courants induits dans le disque par l'aimant, lesquels réagissent ensuite sur l'aimant.

Concevons un nombre quelconque d'aimants agissant sur le disque; mais, pour simplifier, supposons-les très rapprochés du centre et suffisamment éloignés du bord du disque, pour qu'on puisse négliger l'influence de ce bord et regarder la plaque comme indéfinie.

Prenons les aimants fixes et faisons tourner le disque d'un mouvement uniforme. Au bout d'un temps très court, les courants induits dans la plaque arriveront à un état permanent et le champ magnétique

demeurera invariable. C'est cet état que nous nous proposons de déterminer.

Menons les axes des x et y dans le plan moyen du disque et par son centre, et employons les considérations et les notations des numéros précédents. L'action extérieure de la plaque peut être remplacée par celle d'une couche magnétique dont nous représentons la puissance par p et nous désignons par P son potentiel magnétique. D'après cela, si U est le potentiel des aimants, nous aurons, pour les composantes de la force magnétique,

$$X = -\frac{dP}{dx} - \frac{dU}{dx}, \qquad Y = -\frac{dP}{dy} - \frac{dU}{dy}, \qquad Z = -\frac{dP}{dz} - \frac{dU}{dz}.$$

Les composantes u, v du courant, pris pour l'épaisseur de la plaque, sont exprimées comme précédemment par les formules

$$(1) \qquad u = \frac{1}{2\pi}\frac{dP}{dy}, \qquad v = -\frac{1}{2\pi}\frac{dP}{dx},$$

P étant pris sur le côté positif de la plaque.

11. Désignons par φ le potentiel de l'électricité située à l'intérieur et à la surface de la plaque. Les courants de cette plaque peuvent être assimilés à des courants linéaires fermés et permanents, et, comme le champ magnétique est uniforme, il n'y aura de force électromotrice d'induction que celle qui provient du mouvement du disque, et nous avons pour les composantes de la force électromotrice totale (Chap. III, n° 14)

$$Z\frac{dy}{dt} - Y\frac{dz}{dt} - \frac{d\varphi}{dx},$$
$$X\frac{dz}{dt} - Z\frac{dx}{dt} - \frac{d\varphi}{dy},$$
$$Y\frac{dx}{dt} - X\frac{dy}{dt} - \frac{d\varphi}{dz}.$$

Mais, en désignant par ω la vitesse angulaire communiquée au disque, on a pour les composantes de la vitesse en un point quelconque de ce disque

$$\frac{dx}{dt} = -\omega y, \qquad \frac{dy}{dt} = \omega x, \qquad \frac{dz}{dt} = 0;$$

on a donc pour les composantes de la force électromotrice

$$Z\omega x - \frac{d\varphi}{dx}, \quad Z\omega y - \frac{d\varphi}{dy}, \quad -\omega(Xx + Yy) - \frac{d\varphi}{dz}.$$

Les deux premières composantes sont égales respectivement à Ru et Rv, en désignant par R la résistance spécifique de la plaque divisée par son épaisseur et la troisième composante est nulle, puisque les courants sont parallèles au plan des x, y. En ayant donc égard aux expressions de u, v, X, Y et Z, on obtient les trois équations

$$\frac{R}{2\pi}\frac{dP}{dy} = -\omega x\left(\frac{dP}{dz} + \frac{dU}{dz}\right) - \frac{d\varphi}{dx}, \tag{2}$$

$$\frac{R}{2\pi}\frac{dP}{dx} = \omega y\left(\frac{dP}{dz} + \frac{dU}{dz}\right) + \frac{d\varphi}{dy}, \tag{3}$$

$$0 = \omega x\left(\frac{dP}{dx} + \frac{dU}{dx}\right) + \omega y\left(\frac{dP}{dy} + \frac{dU}{dy}\right) - \frac{d\varphi}{dz}. \tag{4}$$

Prenons des coordonnées polaires r et θ données par les formules

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta;$$

remarquons l'équation

$$\frac{d^2P}{dx^2} + \frac{d^2P}{dy^2} = -\frac{d^2P}{dz^2},$$

puis différentions les équations (2) et (3) respectivement par rapport à y et x, et ajoutons-les; nous aurons

$$\frac{R}{2\pi}\frac{d^2P}{dz^2} - \omega\frac{d^2P}{dz\,d\theta} = \omega\frac{d^2U}{dz\,d\theta}. \tag{5}$$

Quand on aura déterminé P par cette équation, on en pourra conclure u et v par les formules (1).

L'équation (4) peut s'écrire

$$\frac{d\varphi}{dz} = \omega r\left(\frac{dP}{dr} + \frac{dU}{dr}\right),$$

et, en combinant entre elles les équations (2) et (3), nous aurons

$$r\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{R}{2\pi}\frac{dP}{d\theta} - \omega r^2\left(\frac{dP}{dz} + \frac{dU}{dz}\right),$$

$$\frac{d\varphi}{d\theta} = \frac{R}{2\pi} r \frac{dP}{dr}.$$

12. Ces deux équations ne déterminent la fonction φ que sur la plaque ou pour $z = 0$: on obtiendra φ pour $z = 0$ en intégrant l'expression $\frac{d\varphi}{dr}dr + \frac{d\varphi}{d\theta}d\theta$, qui est une différence totale d'après l'équation (5). Séparons la fonction φ en deux parties : l'une, φ_1, relative à l'électricité libre, et l'autre, φ_2, relative à une double couche d'électricité. Nous aurons pour la densité ρ de la couche d'électricité libre

$$\rho = -\frac{1}{2\pi c^2}\frac{d\varphi_1}{dz} = -\frac{1}{2\pi c^2}\frac{d\varphi}{dz} = -\frac{1}{2\pi c^2}\omega r\left(\frac{dP}{dr} + \frac{dU}{dr}\right),$$

c étant le nombre de fois que l'unité électrostatique d'électricité est renfermée dans l'unité électromagnétique (*voir* Chap. III, n° 15). L'unité d'électricité ayant été changée, nous devons diviser par c^2 l'expression de la densité trouvée dans la théorie de l'Électrostatique.

De cette formule on peut déduire la valeur de φ_1 pour tout l'espace au moyen de l'intégrale double étendue à tout le plan des x, y

$$\varphi_1 = \int \rho \frac{r\,dr\,d\theta}{q},$$

q étant la distance d'un élément de la plaque au point où l'on prend le potentiel. En faisant $z = 0$ dans son expression, nous aurons la valeur de φ_1 dans la plaque, qu'il suffira de retrancher de la valeur de φ trouvée pour $z = 0$, pour obtenir la valeur de φ_2 dans la plaque.

La fonction φ_2 doit varier d'une manière brusque à la sortie de la plaque, et, si l'on admet que l'action totale de l'électricité de la plaque est nulle sur de l'électricité statique extérieure, on obtient φ_2 à l'extérieur par l'équation

$$\varphi_2 + \varphi_1 = 0;$$

on aura donc aussi φ_2 en tous les points de l'espace, et φ_2 sera une fonction paire en z.

Désignons par φ_2' la valeur trouvée pour φ_2 à l'intérieur de la plaque et par φ_2'' la valeur de φ_2 à l'extérieur pour $z = 0$; la puissance de la double couche située sur chaque face de la plaque sera $\frac{\varphi_2' - \varphi_2''}{4\pi}$.

13. Occupons-nous maintenant de l'intégration de l'équation (5). En raisonnant comme au n° 8, on voit que cette équation a lieu dans tout l'espace situé du côté des z positifs, et, en l'intégrant par rapport à z, après avoir posé

$$\frac{R}{2\pi\omega} = h,$$

on a

$$h\frac{dP}{dz} - \frac{dP}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta} + \lambda(r, \theta), \tag{6}$$

λ étant une fonction arbitraire. La fonction P satisfait aussi à l'équation

$$\Delta P = 0. \tag{7}$$

Supposons que tous les aimants inducteurs soient situés du côté des z négatifs; alors le potentiel U de ces aimants satisfera également du côté des z positifs à l'équation

$$\Delta U = 0. \tag{8}$$

Si nous faisons $z = \infty$ dans l'équation (6), les trois premiers termes sont nuls : le quatrième l'est donc aussi et elle se réduit à

$$h\frac{dP}{dz} - \frac{dP}{d\theta} = \frac{dU}{d\theta}. \tag{a}$$

Cette équation est toute semblable à l'équation du n° 9; on peut donc former immédiatement son intégrale; représentons la fonction U par $U(r, z, \theta)$, en indiquant les variables qui y entrent, et nous aurons

$$P = -\int_0^\theta \frac{dU(r, z + h\upsilon, \theta - \upsilon)}{d\theta} d\upsilon + F(r, z + h\theta),$$

la dernière fonction étant arbitraire; mais, dans ce problème, il ne faut plus la faire nulle, mais la choisir d'après la condition que la fonction P ait la période 2π par rapport à θ.

14. La fonction U est supposée connue; elle satisfait pour z positif à l'équation (8) et elle a la période 2π par rapport à θ; on pourra donc la développer en une série de cette forme

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} U(r,z,\theta) = A_0(r,z) &+ A_1(r,z)\cos\theta + A_2(r,z)\cos 2\theta + \dots \\ &+ B_1(r,z)\sin\theta + B_2(r,z)\sin 2\theta + \dots, \end{aligned}\right.$$

où les fonctions A_n, B_n ne diffèrent que par un facteur constant.

Il en résulte

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \int_0^\theta \frac{dU(r,z+h\upsilon,\theta-\upsilon)}{d\theta}\,d\upsilon = &\sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^\theta A_n(r,z+h\upsilon)\sin n(\upsilon-\theta)\,d\upsilon \\ &+\sum_{n=1}^{\infty} n\int_0^\theta B_n(r,z+h\upsilon)\cos n(\upsilon-\theta)\,d\upsilon, \end{aligned}\right.$$

formule dans laquelle $A_0(r,z)$ disparaît.

Posons, pour simplifier,

$$\frac{d^p A(r,z)}{dz^p} = A^{(p)}(r,z), \qquad \frac{d^p B(r,z)}{dz^p} = B^p(r,z);$$

nous aurons

$$\begin{aligned} n\int &A_n(r,z+h\upsilon)\sin n(\upsilon-\theta)\,d\upsilon \\ &= -A_n(r,z+h\upsilon)\cos n(\upsilon-\theta) + \frac{h}{n}A_n'(r,z+h\upsilon)\sin n(\upsilon-\theta) \\ &\quad + \frac{h^2}{n^2}A_n''(r,z+h\upsilon)\cos n(\upsilon-\theta) - \frac{h^3}{n^3}A_n'''(r,z+h\upsilon)\sin n(\upsilon-\theta) - \dots \end{aligned}$$

et par suite

$$\begin{aligned} n\int_0^\theta &A_n(r,z+h\upsilon)\sin n(\upsilon-\theta)\,d\upsilon \\ &= -A_n(r,z+h\theta) + \frac{h^2}{n^2}A_n''(r,z+h\theta) - \frac{h^4}{n^4}A^{(4)}(r,z+h\theta) + \dots \\ &\quad + A_n(r,z)\cos n\theta + \frac{h}{n}A_n'(r,z)\sin n\theta - \frac{h^2}{n^2}A_n''(r,z)\cos n\theta - \dots \end{aligned}$$

On a de même

$$n\int_0^\theta \mathrm{B}_n(r, z+h\upsilon)\cos n(\upsilon-\theta)\,d\upsilon$$
$$= \frac{h}{n}\mathrm{B}'_n(r, z+h\theta) - \frac{h^2}{n^3}\mathrm{B}'''_n(r, z+h\theta) + \frac{h^4}{n^5}\mathrm{B}^{(5)}_n(r, z+h\theta) + \ldots$$
$$+ \mathrm{B}_n(r, z)\sin n\theta - \frac{h}{n}\mathrm{B}'_n(r, z)\cos n\theta - \frac{h^2}{n^2}\mathrm{B}''(r, z)\sin n\theta + \ldots$$

Ainsi, l'intégrale (10) se compose d'une fonction de la forme $\mathfrak{f}(r, z+h\theta)$ et de la fonction périodique suivante

$$\chi = \sum \mathrm{A}_n(r, z)\cos n\theta + h\sum \frac{1}{n}\mathrm{A}'_n(r, z)\sin n\theta$$
$$- h^2\sum \frac{1}{n^2}\mathrm{A}''(r, z)\cos n\theta - h^3\sum \frac{1}{n^3}\mathrm{A}'''_n(r, z)\sin n\theta + \ldots$$
$$+ \sum \mathrm{B}_n(r, z)\sin n\theta - h\sum \frac{1}{n}\mathrm{B}'_n(r, z)\cos n\theta - \ldots,$$

dans laquelle toutes les sommations se rapportent aux valeurs entières de n depuis 1 jusqu'à ∞.

Afin que la fonction P ait par rapport à 0 la période 2π, prenons $\mathrm{F}(r, z+h\theta)$ égal à $\mathfrak{f}(r, z+h\theta)$ et P se réduira à $-\chi$. Remarquons ensuite que les fonctions A_n, B_n et leurs dérivées par rapport à z s'annulent pour $z=\infty$ et nous en concluons que les deux séries

$$\sum n\int_0^\infty \mathrm{A}_n(r, z+h\upsilon)\sin n(\upsilon-\theta)\,d\upsilon, \quad \sum n\int_0^\infty \mathrm{B}_n(r, z+h\upsilon)\cos n(\upsilon-\theta)\,d\upsilon$$

sont égales aux deux parties de χ où entrent respectivement les fonctions A_n et B_n. Il en résulte que la formule qui donne P peut se mettre sous cette forme très simple

$$(b) \qquad \mathrm{P} = -\int_0^\infty d\,\frac{\mathrm{U}(r, z+h\upsilon, \theta-\upsilon)}{d\theta}\,d\upsilon.$$

Il est facile de vérifier que cette expression satisfait à l'équation (7), d'après l'équation (8).

Cette valeur de P se rapporte aux valeurs positives de z. La fonction

P doit avoir des valeurs égales et de signe contraire pour deux points symétriques par rapport au plan des x, y. On a donc au-dessous de ce plan

$$(c) \qquad P = \int_0^\infty \frac{dU(r, -z + h\upsilon, \theta - \upsilon)}{d\theta} d\upsilon.$$

15. Si l'on veut tenir compte de l'induction du disque par l'action terrestre, il faudra ajouter à U la fonction

$$\upsilon = -f_1 x - f_2 y - f_3 z = -r(f_1 \cos\theta + f_2 \sin\theta) - f_3 z,$$

où f_1, f_2, f_3 sont les composantes de l'action de la Terre. Alors, le second membre de l'équation (a) devra être augmenté de $f_1 y - f_2 x$ et P s'accroîtra de

$$f_1 x + f_2 y.$$

Il en résulterait donc dans la plaque des courants parallèles dont les composantes suivant les x et les y seraient $\frac{f_2}{2\pi}$, $-\frac{f_1}{2\pi}$. Mais bien que, dans les considérations précédentes, on puisse, avec une approximation assez grande, supposer la plaque indéfinie, si l'aimant inducteur est très petit, a ses pôles très éloignés des bords et s'il est situé parallèlement au disque et très près de ce disque, néanmoins ces bords ne sont pas assez éloignés pour qu'on puisse admettre l'existence de ces courants parallèles.

16. *Cas où les aimants inducteurs se réduisent à une aiguille aimantée.* — Le disque étant pris horizontal, supposons que l'inducteur soit une petite aiguille horizontale peu éloignée du disque et dont le centre O soit sur l'axe de ce disque et regardons le magnétisme de cette aiguille comme concentré en deux pôles p_1 et p_2, symétriques par rapport au point O.

Prenons l'axe des z positifs vertical et dans le sens opposé à celui où se trouve l'aiguille, et menons l'axe des x suivant la projection sur le disque de la ligne moyenne de l'aiguille. Soient

$$(x = a, y = 0, z = -c), \qquad (x = -a, y = 0, z = -c)$$

les coordonnées des deux pôles p_1 et p_2 et désignons par μ et $-\mu$ les

quantités de magnétisme qu'ils renferment. Nous aurons pour le potentiel U

$$U = \frac{\mu}{\sqrt{r^2 - 2ar\cos\theta + a^2 + (z+c)^2}} - \frac{\mu}{\sqrt{r^2 + 2ar\cos\theta + a^2 + (z+c)^2}}.$$

La force magnétique provenant du disque, en un point (x, y, z), peut être décomposée suivant r, suivant une seconde horizontale perpendiculaire à r et suivant l'axe des z, et donnera les trois forces

$$-\frac{dP}{dr}, \quad -\frac{1}{r}\frac{dP}{d\theta}, \quad -\frac{dP}{dz},$$

et P est donné par les formules (b) ou (c). Si le point (x, y, z) est situé du même côté que l'aiguille, il faut adopter la seconde formule

$$P = \int_0^\infty \frac{dU(r, -z + h\upsilon, \theta - \upsilon)}{d\theta} d\upsilon.$$

Posons, pour simplifier,

$$T_1 = r^2 - 2ar\cos(\theta - \upsilon) + a^2 + (h\upsilon - z + c)^2,$$
$$T_2 = r^2 + 2ar\cos(\theta - \upsilon) + a^2 + (h\upsilon - z + c)^2,$$

et nous aurons

$$\frac{dU(r, -z + h\upsilon, \theta - \upsilon)}{d\theta} = -\frac{\mu ar\sin(\theta - \upsilon)}{T_1^{\frac{3}{2}}} - \frac{\mu ar\sin(\theta - \upsilon)}{T_2^{\frac{3}{2}}},$$

puis

$$P = -\mu ar\int_0^\infty \frac{\sin(\theta - \upsilon)}{T_1^{\frac{3}{2}}} d\upsilon - \mu ar\int_0^\infty \frac{\sin(\theta - \upsilon)}{T_2^{\frac{3}{2}}} d\upsilon.$$

Nous pourrons ensuite former les composantes de la force magnétique qui provient de la plaque, en différentiant cette formule par rapport à r, θ et z. Ainsi, nous aurons, pour la composante horizontale perpendiculaire à r,

$$-\frac{1}{r}\frac{dP}{d\theta} = \mu a\int_0^\infty \frac{\cos(\theta - \upsilon)}{T_1^{\frac{3}{2}}} d\upsilon + \mu a\int_0^\infty \frac{\cos(\theta - \upsilon)}{T_2^{\frac{3}{2}}} d\upsilon$$
$$- 3\mu a^2 r\int_0^\infty \frac{\sin^2(\theta - \upsilon)}{T_1^{\frac{5}{2}}} d\upsilon + 3\mu a^2 r\int_0^\infty \frac{\sin^2(\theta - \upsilon)}{T_2^{\frac{5}{2}}} d\upsilon.$$

Les composantes du courant suivant r et la perpendiculaire à r seront respectivement $\frac{1}{2\pi r}\frac{dP}{d\theta}$ et $-\frac{1}{2\pi}\frac{dP}{dr}$.

17. *Aiguille mobile déplacée par le disque.* — Désignons par P_1 et P_2 ce que devient P aux deux pôles p_1 et p_2. Le couple horizontal produit sur l'aiguille a pour moment

$$K = -\mu\frac{dP_1}{d\theta} + \mu\frac{dP_2}{d\theta}.$$

Posons

$$\mathfrak{C}_1 = 4a^2\sin^2\frac{\upsilon}{2} + (h\upsilon + 2c)^2, \qquad \mathfrak{C}_2 = 4a^2\cos^2\frac{\upsilon}{2} + (h\upsilon + 2c)^2,$$

et nous aurons

$$K = 2\mu^2a^2\int_0^\infty \frac{\cos\upsilon}{\mathfrak{C}_1^{\frac{3}{2}}}d\upsilon + 2\mu^2a^2\int_0^\infty \frac{\cos\upsilon}{\mathfrak{C}_2^{\frac{3}{2}}}d\upsilon$$
$$- 6\mu^2a^4\int_0^\infty \frac{\sin^2\upsilon}{\mathfrak{C}_1^{\frac{5}{2}}}d\upsilon + 6\mu^2a^4\int_0^\infty \frac{\sin^2\upsilon}{\mathfrak{C}_2^{\frac{5}{2}}}d\upsilon.$$

Jusqu'à présent, nous avons supposé que l'aimant était maintenu fixe; regardons maintenant l'aiguille comme mobile sur son pivot.

Si le mouvement uniforme du disque n'est pas trop grand, l'aiguille se déplacera du méridien magnétique pour se placer dans une position fixe.

Prenons encore l'axe des x suivant la projection de l'aiguille; désignons par F la composante horizontale de l'action de la Terre et par α l'angle de F avec Ox, cet angle étant compté dans le même sens que ω. Le couple produit sur l'aiguille par la Terre sera

$$-2\mu Fa\sin\alpha;$$

on aura donc l'équation

$$K - 2\mu Fa\sin\alpha = 0,$$

qui déterminera la déviation α de l'aiguille, pour qu'elle se trouve en équilibre.

Connaissant la vitesse angulaire ω du disque, on pourra calculer les quatre intégrales définies qui entrent dans K par les méthodes géné-

rales de quadrature; K grandira en même temps que ω et la déviation de l'aiguille sera fixe, en étant d'autant plus grande que ω sera plus grand, tant qu'on aura

$$K < 2\mu F a.$$

Mais, si ω a une valeur plus grande que celle qui correspond à l'équation

$$K = 2\mu F a,$$

l'aiguille sera entraînée dans un mouvement accéléré, jusqu'à ce que la résistance de l'air et le frottement sur le pivot amènent l'uniformité de son mouvement. A partir de ce moment, l'état des courants du disque pourra être calculé comme si l'aiguille était fixe, pourvu que l'on compte toujours cet état à partir de la projection de l'aiguille et qu'on remplace dans les formules la vitesse angulaire ω par la différence des vitesses angulaires ω et ω' du disque et de l'aiguille.

Conducteur de révolution soumis à l'influence d'aimants, pendant qu'il tourne d'un mouvement uniforme autour de son axe.

18. Supposons un conducteur quelconque de révolution qui tourne autour de son axe de figure d'un mouvement uniforme, tandis qu'il est soumis à l'induction d'aimants fixes. Au bout d'un temps très court, les courants produits dans le conducteur arriveront à un état permanent.

Remarquons que la permanence des courants ne se produirait pas dans un conducteur mis en mouvement autour d'une droite qui ne serait pas un axe de révolution du corps; car l'espace occupé par ce corps ne se présenterait pas constamment de la même manière par rapport aux aimants. L'état des courants serait alors périodique, et la durée de la période serait celle d'un tour fait par le corps.

Désignons, comme au n° 11, par ω la vitesse angulaire communiquée au corps induit, par X, Y, Z les composantes de la force magnétique et par φ le potentiel de l'électricité du conducteur. Les composantes de la force électromotrice dans le conducteur seront

$$Z\omega x - \frac{d\varphi}{dx}, \quad Z\omega y - \frac{d\varphi}{dy}, \quad -\omega(Xx + Yy) - \frac{d\varphi}{dz}.$$

Les courants étant permanents, les composantes de la force magnétique qui provient de ces courants sont (Chap. IV, n° 6)

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz}, \quad \frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx}, \quad \frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy},$$

en posant

$$\mathfrak{F} = \int \frac{u}{r}\, d\varpi, \qquad \mathfrak{G} = \int \frac{v}{r}\, d\varpi, \qquad \mathfrak{H} = \int \frac{w}{r}\, d\varpi$$

et désignant par u, v, w les composantes du courant. Si donc on désigne par U le potentiel des aimants, on aura, pour les composantes de la force magnétique totale,

$$\mathrm{X} = \frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz} - \frac{d\mathrm{U}}{dx},$$
$$\mathrm{Y} = \frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx} - \frac{d\mathrm{U}}{dy},$$
$$\mathrm{Z} = \frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy} - \frac{d\mathrm{U}}{dz}.$$

Si l'on représente par h la résistance spécifique du conducteur, on a

$$hu = \mathrm{Z}\omega x - \frac{d\varphi}{dx},$$
$$hv = \mathrm{Z}\omega y - \frac{d\varphi}{dy},$$
$$hw = -\omega(\mathrm{X}x + \mathrm{Y}y) - \frac{d\varphi}{dz}.$$

On a ensuite les trois équations

$$4\pi u = -\Delta\mathfrak{F}, \qquad 4\pi v = -\Delta\mathfrak{G}, \qquad 4\pi w = -\Delta\mathfrak{H}.$$

En égalant les composantes u, v, w du courant tirées de ces deux systèmes d'équations, on obtient

$$(1) \qquad \frac{h}{4\pi}\Delta\mathfrak{F} = -\omega x\left(\frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy}\right) + \omega x\frac{d\mathrm{U}}{dz} + \frac{d\varphi}{dx},$$

$$(2) \qquad \frac{h}{4\pi}\Delta\mathfrak{G} = -\omega y\left(\frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy}\right) + \omega y\frac{d\mathrm{U}}{dz} + \frac{d\varphi}{dy},$$

$$(3) \qquad \frac{h}{4\pi}\Delta\mathfrak{H} = \omega x\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz} - \frac{d\mathrm{U}}{dx}\right) + \omega y\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx} - \frac{d\mathrm{U}}{dy}\right) + \frac{d\varphi}{dz}.$$

On a aussi l'équation

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx}+\frac{d\mathcal{G}}{dy}+\frac{d\mathcal{H}}{dz}=0 \tag{4}$$

(Chap. IV, n° 8).

Désignons par $\mathfrak{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}'$, φ' ce que deviennent $\mathfrak{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, φ à l'extérieur du conducteur; nous aurons

$$\begin{cases} \Delta\mathfrak{F}'=0, & \Delta\mathcal{G}'=0, & \Delta\mathcal{H}'=0, & \Delta\varphi'=0, \\ & \dfrac{d\mathfrak{F}'}{dx}+\dfrac{d\mathcal{G}'}{dy}+\dfrac{d\mathcal{H}'}{dz}=0. \end{cases} \tag{5}$$

Enfin, nous aurons à la surface du conducteur les conditions

$$\begin{cases} \mathfrak{F}=\mathfrak{F}', & \mathcal{G}=\mathcal{G}', & \mathcal{H}=\mathcal{H}', \\ \dfrac{d\mathfrak{F}}{dn}=\dfrac{d\mathfrak{F}'}{dn}, & \dfrac{d\mathcal{G}}{dn}=\dfrac{d\mathcal{G}'}{dn}, & \dfrac{d\mathcal{H}}{dn}=\dfrac{d\mathcal{H}'}{dn}, \end{cases} \tag{6}$$

en désignant par dn un élément de normale mené à la surface du conducteur.

19. Nous allons transformer les équations précédentes. Posons

$$\frac{d\mathcal{G}}{dx}-\frac{d\mathfrak{F}}{dy}=\mathrm{P},$$

et adoptons les coordonnées r, ψ données par

$$x=r\cos\psi, \qquad y=r\sin\psi.$$

Différentions (2) par rapport à x, (1) par rapport à y et retranchons: nous aurons cette équation, qui ne contient que l'inconnue P,

$$\Delta\mathrm{P}=a\frac{d\mathrm{P}}{d\psi}-a\frac{d^2\mathrm{U}}{dz\,d\psi}, \tag{A}$$

en posant

$$\frac{4\pi\omega}{h}=a.$$

Désignons ensuite par P′ ce que devient P à l'extérieur du corps; nous aurons

$$\Delta P' = 0,$$

et, d'après les secondes équations (6), nous avons cette condition à la surface

$$P = P'.$$

Différentions les équations (1), (2), (3) respectivement par rapport à x, y, z et ajoutons. D'après l'équation (4), le premier membre de l'équation qui en résultera sera nul et l'on aura

$$0 = -2\omega\left(P - \frac{dU}{dz}\right) - \omega\left(x\frac{dP}{dx} + y\frac{dP}{dy}\right) + \omega x\left(\frac{d^2\mathfrak{H}}{dy\,dz} - \frac{d^2\mathfrak{G}}{dz^2}\right) + \omega y\left(\frac{d^2\mathfrak{F}}{dz^2} - \frac{d^2\mathfrak{H}}{dx\,dz}\right) + \Delta\varphi.$$

Éliminons $\mathfrak{H}$ de cette équation au moyen de la formule

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dz} = -\frac{d\mathfrak{F}}{dx} - \frac{d\mathfrak{G}}{dy},$$

et, après les réductions, nous aurons

$$\Delta\varphi = \omega(x\,\Delta\mathfrak{G} - y\,\Delta\mathfrak{F}) + 2\omega\left(P - \frac{dU}{dz}\right).$$

Multiplions l'équation (2) par y, (1) par x et retranchons; nous aurons

$$x\,\Delta\mathfrak{G} - y\,\Delta\mathfrak{F} = \frac{4\pi}{h}\frac{d\varphi}{d\psi}.$$

Substituons dans l'équation précédente et nous aurons ainsi une équation qui ne renferme plus que l'inconnue φ

$$\Delta\varphi - a\frac{d\varphi}{d\psi} = 2\omega\left(P - \frac{dU}{dz}\right); \tag{B}$$

φ satisfait de plus à l'extérieur à la quatrième équation (5).

Il résulte de l'équation (B) que la densité de l'électricité à l'inté-

rieur du conducteur est donnée par l'expression

$$-\frac{a}{4\pi c^2}\frac{d\varphi}{d\psi}-\frac{\omega}{2\pi c^2}\left(\mathrm{P}-\frac{d\mathrm{U}}{dz}\right),$$

c ayant la valeur indiquée au n° 12.

20. Indiquons maintenant comment on pourra procéder aux intégrations. Considérant d'abord l'équation (A), posons

$$\mathrm{P}=\frac{d\Pi}{dz},$$

nous aurons

$$\Delta\Pi-a\frac{d\Pi}{d\psi}=-a\frac{d\mathrm{U}}{d\psi}.$$

Comme on a $\Delta\mathrm{U}=0$, on satisfait à cette équation en faisant $\Pi=\mathrm{U}$; désignons donc par Π_1 la solution générale de l'équation

$$\Delta\Pi_1-a\frac{d\Pi_1}{d\psi}=0, \tag{a}$$

et nous aurons, pour l'expression générale de Π,

$$\Pi=\Pi_1+\mathrm{U}.$$

Examinons ensuite l'équation (B), qu'on peut écrire

$$\Delta\varphi-a\frac{d\varphi}{d\psi}=2\omega\frac{d\Pi_1}{dz},$$

et, en posant

$$\varphi=\frac{a\Phi}{dz},$$

on aura

$$\Delta\Phi-a\frac{d\Phi}{d\psi}=2\omega\Pi_1. \tag{b}$$

La valeur de Φ se composera de deux parties : l'une Π'_1, qui satisfera à (a), aura la même forme que Π_1, sauf que les coefficients indéterminés y seront remplacés par d'autres et, en y ajoutant une solution particulière Φ_1 de l'équation (b), on aura

$$\Phi=\Pi'_1+\Phi_1.$$

Il est à remarquer que cette expression a été déterminée indépendamment de la fonction U.

Ensuite on a, pour les composantes u, v du courant,

$$hu = \frac{d\Pi_1}{dz}\omega x - \frac{d^2\Phi}{dx\,dz},$$

$$hv = \frac{d\Pi_1}{dz}\omega y - \frac{d^2\Phi}{dy\,dz}.$$

Posons

$$u = \frac{du_1}{dz}, \qquad v = \frac{dv_1}{dz},$$

et nous obtenons

$$hu_1 = \Pi_1\omega x - \frac{d\Phi}{dx},$$

$$hv_1 = \Pi_1\omega y - \frac{d\Phi}{dy};$$

puis, de l'équation

$$\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} = 0,$$

nous tirerons

$$w = -\frac{du_1}{dx} - \frac{dv_1}{dy}.$$

Enfin on se servira de la condition à la surface

$$u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu = 0,$$

où λ, μ, ν désignent les angles de la normale à la surface du corps avec les trois axes de coordonnées.

Les expressions de u, v, w renferment des coefficients indéterminés. On pourra néanmoins former $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$ d'après les formules

$$\mathfrak{F} = \int \frac{u}{r}\,d\varpi, \qquad \mathfrak{G} = \int \frac{v}{r}\,d\omega, \qquad \mathfrak{H} = \int \frac{w}{r}\,d\varpi.$$

Jusqu'à présent, l'expression du potentiel U qui produit l'induction n'est pas entrée dans le calcul des quantités φ, u, v, w, $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{H}$; mais, d'après l'équation (3), on a

$$hw = -\omega x\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz}\right) - \omega y\left(\frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx}\right) - \frac{d\varphi}{dz} + \omega r\frac{dU}{dr},$$

et les coefficients indéterminés qu'on a introduits dans φ et qui se retrouvent dans w, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ pourront être déterminés au moyen des coefficients de la fonction connue U.

Problème précédent dans le cas où la distribution magnétique est symétrique autour de l'axe du conducteur.

21. Lorsque la distribution du magnétisme inducteur est symétrique autour de l'axe de révolution du conducteur, il ne se produit pas de courants d'électricité dans ce conducteur par suite de son mouvement uniforme de rotation, ainsi que l'a remarqué Jochmann (*Journal de Crelle*, t. 63); mais il se trouve à l'intérieur du corps de l'électricité libre qui, jointe à l'électricité de la surface, fait équilibre à la force électromotrice d'induction.

Nous avons, comme au n° 18, les équations

$$hu = Z\omega x - \frac{d\varphi}{dx},$$

$$hv = Z\omega y - \frac{d\varphi}{dy},$$

$$hw = -\omega(Xx + Yy) - \frac{d\varphi}{dz};$$

il s'agit de démontrer qu'on peut choisir φ de manière que u, v, w soient nuls. Alors les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ sont nulles; la force magnétique ne provient plus que des aimants dont le potentiel est U, et l'on tire des équations précédentes

$$(1) \qquad \begin{cases} \dfrac{d\varphi}{dx} = -\omega x \dfrac{dU}{dz}, \\ \dfrac{d\varphi}{dy} = -\omega y \dfrac{dU}{dz}, \\ \dfrac{d\varphi}{dz} = \omega\left(x\dfrac{dU}{dx} + y\dfrac{dU}{dy}\right). \end{cases}$$

Prenons des coordonnées polaires r et ψ, et il en résultera

$$\frac{d\varphi}{dr} = -\omega r \frac{dU}{dz}, \qquad \frac{d\varphi}{d\psi} = 0, \qquad \frac{d\varphi}{dz} = \omega r \frac{dU}{dr}.$$

La fonction U satisfait à l'intérieur du conducteur à l'équation $\Delta U = 0$, qui se réduit à

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dU}{dr}\right) + r\frac{d^2U}{dz^2} = 0,$$

puisque, par hypothèse, U est indépendant de ψ. On aura ensuite

$$\varphi = \omega \int \left(r\frac{dU}{dr}\,dz - r\frac{dU}{dz}\,dr\right), \tag{2}$$

expression intégrable, comme il résulte de l'équation précédente.

Si l'on différentie les équations (1) respectivement par rapport à x, y, z, et qu'on ajoute, on a

$$\Delta\varphi = -2\omega\frac{dU}{dz}.$$

Séparons la fonction φ en deux parties : l'une, φ_1, relative à l'électricité libre située à l'intérieur et à la surface du conducteur, et l'autre, φ_2, relative à une double couche située à la surface. Nous aurons

$$\Delta\varphi_2 = 0, \qquad \Delta\varphi_1 = -2\omega\frac{dU}{dz},$$

et, d'après cela, si D est la densité de l'électricité libre à l'intérieur du corps, nous obtenons

$$D = \frac{\omega}{2\pi c^2}\frac{dU}{dz}. \tag{3}$$

22. Supposons que le conducteur n'ait pas été chargé d'électricité; l'action extérieure de l'électricité de ce conducteur sera nulle et, en désignant par φ'_1 et φ'_2 ce que deviennent φ_1 et φ_2 à l'extérieur, nous aurons

$$\varphi'_1 + \varphi'_2 = 0. \tag{4}$$

La densité à la surface sera

$$\rho = -\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{d\varphi_1}{dn'} + \frac{d\varphi'_1}{dn}\right),$$

dn' et dn étant les éléments de normale intérieure et extérieure. Or

on a

$$\frac{d\varphi'_2}{dn} = -\frac{d\varphi_2}{dn'};$$

donc, d'après (4),

$$\frac{d\varphi'_1}{dn} = -\frac{d\varphi'_2}{dn} = \frac{d\varphi_2}{dn'},$$

et, par suite, ρ devient

$$\rho = -\frac{1}{4\pi c^2}\left(\frac{d\varphi_1}{dn'} + \frac{d\varphi_2}{dn'}\right) = -\frac{1}{4\pi c^2}\frac{d\varphi}{dn'}.$$

Ainsi ρ peut être calculé par la valeur (2) de φ, sans qu'on soit obligé de calculer φ'_1 à l'extérieur.

Connaissant D et ρ, on peut en déduire φ_1 à l'intérieur et à l'extérieur; on aura ensuite φ_2 à l'intérieur par l'équation

$$\varphi_2 = \varphi - \varphi_1.$$

Enfin, on aura φ_2 à l'extérieur par l'équation

$$\varphi'_2 = -\varphi'_1.$$

Si l'on met sur le conducteur une masse M d'électricité, elle s'ajoutera à l'électricité précédente en se plaçant à la surface suivant les lois de l'Électrostatique.

23. Appliquons ce problème au cas d'une sphère qui tourne autour d'un diamètre en même temps qu'elle est soumise à l'influence d'une force magnétique constante et parallèle à l'axe de rotation.

En désignant par H une quantité constante, nous aurons

$$\frac{dU}{dz} = H, \qquad \frac{dU}{dr} = 0,$$

et, d'après l'équation (2),

$$\varphi = -\tfrac{1}{2}\omega H r^2 + C,$$

C étant une constante arbitraire. Désignons par R la distance d'un point

au centre de la sphère et par α l'angle que fait R avec l'axe de rotation; nous aurons

$$\varphi = -\tfrac{1}{2}\omega \mathrm{H} R^2 \sin^2\alpha + \mathrm{C}.$$

De la formule (3) on tire

$$\mathrm{D} = \frac{\omega}{2\pi c^2}\mathrm{H},$$

et nous aurons ensuite pour la densité à la surface

$$\rho = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{d\varphi}{d\mathrm{R}} = -\frac{1}{4\pi c^2}\omega \mathrm{H} a \sin^2\alpha.$$

Si nous désignons par X_2 la fonction sphérique du second ordre

$$\tfrac{3}{2}(\cos^2\alpha - \tfrac{1}{3}),$$

nous pouvons aussi écrire

$$\rho = -\frac{1}{6\pi c^2}\omega \mathrm{H} a(1 - \mathrm{X}_2).$$

Nous pouvons partager φ_1 en deux parties : l'une relative à l'électricité intérieure et l'autre relative à l'électricité superficielle, et poser

$$\varphi_1 = c^2\int \frac{\mathrm{D}}{r}d\varpi + c^2\int \frac{\rho}{r}d\sigma.$$

Désignons par J et J′ la valeur de la seconde intégrale à l'intérieur et à l'extérieur; nous aurons, d'après la valeur de ρ,

$$\mathrm{J} = -\tfrac{2}{3}\omega \mathrm{H} a^2\left(1 - \frac{\mathrm{R}^2}{5a^2}\mathrm{X}_2\right),$$

$$\mathrm{J}' = -\tfrac{2}{3}\omega \mathrm{H} a^3\left(\frac{1}{\mathrm{R}} - \frac{a^2}{5\mathrm{R}^3}\mathrm{X}_2\right).$$

La première intégrale qui entre dans φ_1 a pour valeur, à l'intérieur,

$$2\pi \mathrm{D} a^2 - \tfrac{2}{3}\pi \mathrm{D}\mathrm{R}^2;$$

à l'extérieur,

$$\tfrac{4}{3}\pi \mathrm{D}\frac{a^3}{\mathrm{R}}.$$

On a donc, à l'intérieur de la sphère,

$$\varphi_1 = \tfrac{1}{3}\omega H(a^2 - R^2) + \tfrac{2}{15}\omega H R^2 X_2,$$

et, à l'extérieur,

$$\varphi'_1 = \tfrac{2}{15}\omega H \frac{a^5}{R^3} X_2.$$

On a ensuite

$$\varphi_2 = \varphi - \varphi_1 = C - \tfrac{1}{3}\omega H a^2 + \tfrac{1}{5}\omega H R^2 X_2.$$

La partie constante de cette expression correspond à une couche de puissance constante et dont le potentiel est nul à l'extérieur; on peut annuler cette partie constante en faisant

$$C = \tfrac{1}{3}\omega H a^2,$$

et nous aurons

$$\varphi_2 = \tfrac{1}{5}\omega H R^2 X_2, \qquad \varphi'_2 = -\tfrac{2}{15}\omega H \frac{a^5}{R^3} X_2.$$

Le problème est ainsi complètement résolu.

CHAPITRE VII.

SUR LES UNITÉS ÉLECTRIQUES.

1. Toutes les quantités considérées en Mécanique et dans les sciences physiques ne dépendent que de trois sortes de quantités : espace, temps et masse. Par conséquent, on peut les évaluer au moyen des trois unités de longueur, de temps et de masse. Ces unités sont dites *fondamentales*.

Suivant une notation assez employée maintenant, nous désignerons respectivement par [L], [T], [M] les unités de longueur, de temps et de masse.

On appelle unités *dérivées* des unités qui s'expriment au moyen des unités fondamentales. Toute unité dérivée est par sa nature le produit de puissances déterminées des unités fondamentales, affecté d'un coefficient, et, pour simplifier son expression, on réduit ce coefficient à l'unité.

Si a est la valeur numérique d'une quantité, c'est que cette quantité est égale à a[A], en désignant par [A] l'unité choisie pour évaluer cette quantité. Si donc, en choisissant une autre unité [B], la valeur numérique de la même quantité est b, on aura

$$a[\mathrm{A}] = b[\mathrm{B}],$$

et, par conséquent, le rapport de deux valeurs numériques d'une quantité est l'inverse du rapport des unités auxquelles on la compare.

Unités dérivées en Mécanique.

2. La vitesse est le rapport d'un espace parcouru par un mobile au temps mis à le parcourir; nous prendrons donc pour unité de vitesse

[L]:[T] ou $[LT^{-1}]$, c'est-à-dire le rapport de l'unité de longueur à l'unité de temps.

L'accélération est le rapport d'un accroissement de vitesse à l'accroissement correspondant du temps; c'est donc le rapport d'une vitesse à un temps. On prendra $[LT^{-2}]$ pour unité d'accélération.

La masse d'un corps est le rapport d'une force quelconque à l'accélération qu'elle imprimerait à ce corps, si elle lui était appliquée. La force est donc une masse multipliée par une accélération, et son unité sera prise égale à $[MLT^{-2}]$.

Pour la troisième unité fondamentale, on prend ordinairement, en Mécanique, l'unité de force au lieu de l'unité de masse. Cette unité de force est le plus souvent le poids du kilogramme ou une subdivision de ce poids. Mais ce poids éprouve de petites variations, selon le lieu de la Terre où l'on se trouve. La masse du kilogramme reste, au contraire, invariable, soit qu'on la regarde comme celle d'un litre d'eau à la température de 4°, soit qu'on la considère comme celle d'un étalon conservé aux Archives de Paris. C'est pour cette raison que, dans les calculs sur l'électricité, on préfère prendre pour la troisième unité fondamentale l'unité de masse, de laquelle on conclut l'unité de force.

Le travail d'une force sur un point matériel est le produit d'une force par une longueur, et l'on prend pour unité de travail $[ML^2T^{-2}]$.

Unités de masse électrique.

3. En Électrostatique, on a défini l'unité de masse électrique une quantité d'électricité positive qui repousse une pareille masse avec l'unité de force, quand ces deux masses sont séparées par l'unité de distance. En partant de cette définition, on obtient un système d'unités électriques dérivées qui est appelé *système électrostatique*.

Mais l'unité de masse électrique a une autre valeur par suite d'une convention faite dans le Chapitre II (n° 14) et de laquelle nous avons conclu, au n° 25 de ce Chapitre, l'unité d'intensité d'un courant linéaire permanent. Comme, en général, l'intensité d'un tel courant est la quantité d'électricité qui traverse une section du fil dans l'unité de temps, l'unité de masse électrique se trouve elle-même déterminée, dès qu'on se donne l'unité de temps, puisque c'est la quantité d'élec-

tricité qui traverse une section du fil dans un courant égal à l'unité pendant l'unité de temps.

Le système d'unités électriques, qui dérive de cette unité de masse électrique, s'appelle *système électromagnétique*, et c'est celui que nous avons adopté dans les Chapitres précédents.

Déterminons le rapport entre ces deux unités de masse électrique.

4. Laissons d'abord arbitraires ces deux unités pour exprimer les lois de Coulomb et d'Ampère; il faut alors multiplier par un coefficient chacune des formules qui expriment ces lois. Ainsi, d'après la loi de Coulomb, l'action entre les quantités q et q' d'électricité, séparées par la distance r, sera exprimée par la formule

$$(a) \qquad h\frac{qq'}{r^2},$$

où h désigne un coefficient constant, et, si nous adoptons les notations du n° 24 du Chapitre II, l'action entre deux éléments de courants sera

$$(b) \qquad k\mathrm{II}'\frac{ds\,ds'}{r^2}(2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta'),$$

k étant un coefficient constant.

En faisant $q'=q$ dans la formule (a), on voit que $h\frac{q^2}{r^2}$ est une force. Dans la formule (b), $k\mathrm{II}'$ est multiplié par une quantité sans degré; donc $k\mathrm{II}'$ et aussi $k\mathrm{I}^2$ est également une force. D'après cela, le rapport

$$\left(h\frac{q^2}{r^2}\right):(k\mathrm{I}^2)=n$$

est un nombre abstrait. Comme I désigne le rapport d'une quantité q' d'électricité à un temps t, on aura

$$\mathrm{I}=\frac{q'}{t}, \qquad \frac{h}{k}=n\frac{q'^2}{q^2}\frac{r^2}{t^2};$$

$n\frac{q'^2}{q^2}$ est un nombre abstrait, et $\frac{r}{t}$, étant le rapport d'une longueur à un

temps, exprime une vitesse; donc on peut poser

$$\frac{h}{k} = c^2,$$

c étant une vitesse dont la grandeur est indépendante des unités fondamentales employées.

Si nous adoptons le système électrostatique, nous devrons faire $h = 1$ dans la formule (a), qui se réduira à

$$(c) \qquad \frac{qq'}{r^2};$$

il en résultera $k = \frac{1}{c^2}$, et nous aurons, pour la formule (b),

$$\frac{1}{c^2} \Pi' \frac{ds\,ds'}{r^2} (2\cos\varepsilon - 3\cos\theta\cos\theta').$$

Si nous employons le système électromagnétique adopté dans le Chapitre II et les suivants, nous ferons $k = 1$ dans la formule (b), et, par suite, nous aurons $h = c^2$. Désignons par Q et Q′ ce que deviennent les quantités q et q' d'électricité, exprimées dans ce système d'unités; la formule (a) deviendra

$$(d) \qquad c^2 \frac{QQ'}{r^2}.$$

Les expressions (c) et (d) étant celles d'une même force, nous en concluons

$$q = cQ.$$

Désignons donc par $[q]$ et $[Q]$ les unités de masse électrique dans les systèmes électrostatique et électromagnétique; nous aurons

$$[q] = \frac{1}{c}[Q].$$

Ainsi la quantité c est le nombre de fois que l'unité électrostatique d'électricité est renfermée dans l'unité électromagnétique; ce nombre change évidemment avec les unités de longueur et de temps.

5. La quantité c a été définie pour la première fois par W. Weber ; il en a déterminé aussi le premier la valeur avec Kohlrausch. Ces physiciens mesuraient la charge d'une bouteille de Leyde de deux manières. Ils l'obtenaient en mesure électrostatique par le produit de la capacité de la bouteille par la différence de potentiel des deux armatures. Ils l'évaluaient en mesure électromagnétique par les effets de la décharge de la bouteille dans le circuit d'un galvanomètre.

Weber et Kohlrausch ont trouvé, par ces expériences,

$$c = 31074000 \text{ mètres par seconde.}$$

Cette recherche a été ensuite reprise par différents physiciens. Suivant les expériences les plus récentes, on a

$$c = 298 \times 10^6 \text{ mètres par seconde,}$$

vitesse qui peut être considérée comme égale à celle de la lumière ($300{,}4 \times 10^6$ d'après M. Cornu).

6. Toute quantité employée dans les calculs sur l'électricité peut être regardée comme le produit d'un nombre abstrait par une expression $[L^a T^b M^c]$. La détermination des dimensions a, b, c est très utile. En particulier, elle peut servir à constater immédiatement une faute de calcul ou même de raisonnement, si l'erreur entraîne dans les équations un manque d'homogénéité. Nous allons déterminer les dimensions des quantités électriques dans les deux systèmes électrostatique et électromagnétique.

MM. Mercadier et Vaschy ont cherché à démontrer que le système électromagnétique est seul rationnel. Ils se fondent d'abord sur ce que le coefficient h de la formule (a) de Coulomb, que l'on fait égal à l'unité dans l'air si l'on adopte le système électrostatique, varie dans les liquides transparents proportionnellement au carré de la vitesse de la lumière. Puis, ils prouvent, par des expériences, que le coefficient k de la formule (b) d'Ampère reste le même, quand on remplace l'air, dans lequel se trouvent ordinairement les circuits électriques, par différents liquides.

Système électrostatique.

7. Représentons par de petites lettres, mises entre crochets, les unités dans le système électrostatique; nous adopterons les mêmes lettres, prises majuscules, pour le système électromagnétique.

Unité de quantité d'électricité $[q]$. — Dans ce système, la force F qui agit entre deux masses q d'électricité, séparées par la distance r, a pour expression

$$F = \frac{q^2}{r^2};$$

donc

$$q = r\sqrt{F},$$

et, en se reportant à l'expression de l'unité de force (n° 2), on a

$$[q] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}];$$

on aura ensuite, pour unité de densité cubique électrique,

$$[d] = [L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$$

et, pour unité de densité électrique superficielle,

$$[\rho] = [L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Unité de potentiel d'une masse électrique $[\varphi]$. — Cette quantité sera le potentiel de l'unité de masse électrique, pris à l'unité de distance, et l'on a

$$[\varphi] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Si, dans un courant linéaire permanent, une quantité q d'électricité est transportée le long d'une courbe AB d'un point A, où le potentiel est φ_1, à un point B où le potentiel est φ_2, le travail qui en résultera sera $(\varphi_1 - \varphi_2)q$ ou $\varphi_1 q$ seulement si φ_2 est nul. Réciproquement, le potentiel ou la force électromotrice le long du courant AB peut être

défini comme le travail effectué par la masse q, divisé par q. Nous pouvons donc poser

$$(e) \qquad \varphi q = \mathfrak{E},$$

$\mathfrak{E}$ étant homogène avec le produit d'une force par une longueur, et nous retrouvons de cette manière l'expression de $[\varphi]$.

Unité de capacité $[a]$. — La capacité d'un condensateur est le rapport de sa charge à la différence de potentiel des armatures; on a donc

$$[a] = [\mathrm{L}];$$

ainsi la capacité est une longueur; celle d'une sphère, par exemple, est représentée par son rayon.

Unité d'intensité de courant linéaire $[i]$. — L'intensité d'un courant linéaire est la quantité d'électricité qui traverse une section du fil dans l'unité de temps; on a donc

$$[i] = [\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{-2}].$$

Dans un conducteur à trois dimensions, les composantes du courant, désignées en général dans ce Livre par u, v, w, sont de l'homogénéité de $\mathrm{L}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{-2}$.

Unité de résistance $[r]$ *d'un conducteur linéaire.* — D'après la loi de Ohm, la résistance est le rapport de la force électromotrice entre deux points à l'intensité du courant; on a donc

$$[r] = [\mathrm{L}^{\frac{1}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{-1}] : [\mathrm{L}^{\frac{3}{2}}\mathrm{M}^{\frac{1}{2}}\mathrm{T}^{-2}] = [\mathrm{L}^{-1}\mathrm{T}];$$

ainsi cette résistance est l'inverse d'une vitesse.

La résistance spécifique du métal d'un conducteur est du degré de $[r][\mathrm{L}] = [\mathrm{T}]$ (Chap. II, n° 1), et sa conductibilité spécifique est du degré de $[\mathrm{T}^{-1}]$.

Unité de magnétisme $[\mu]$. — Nous avons vu (Chap. II, n° 38) que la force F produite par le pôle μ d'un aimant sur un élément de courant $j\,ds$ est perpendiculaire au plan mené par μ et par cet élément, et

qu'elle a pour expression

$$(f) \qquad F = \mu j \frac{ds}{r^2} \sin(r, ds);$$

le second membre est égal à μj multiplié par l'inverse d'une ligne l; on a donc

$$\mu = \frac{Fl}{j},$$

$$[\mu] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Unité de potentiel d'une masse magnétique. — Elle sera égale à l'unité de masse magnétique divisée par l'unité de distance ou à $[L^{-\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}]$.

Unité de coefficient d'induction d'un diélectrique. — Dans un diélectrique dont le coefficient d'induction est p, on a (*Théorie du potentiel*, IIe Partie, Chap. III, n° 11)

$$p \Delta\varphi = -4\pi d,$$

en désignant par d la densité de l'électricité dans le diélectrique; on en conclut que p est sans degré ou

$$[p] = 1.$$

Système électromagnétique.

8. Dans le système électromagnétique, l'action entre deux masses électriques égales à Q a pour grandeur (n° 4)

$$F = c^2 \frac{Q^2}{r^2}, \qquad \text{d'où} \qquad Q = \frac{1}{c} r \sqrt{F},$$

et, comme c est une vitesse, on a pour l'unité de masse électrique

$$[Q] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}],$$

et l'on en conclut, pour les densités électriques cubique et superficielle,

$$[D] = [L^{-\frac{5}{2}} M^{\frac{1}{2}}], \qquad [P] = [L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}}].$$

Intensité d'un courant linéaire. — Son unité sera

$$[I] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}].$$

Dans un conducteur à trois dimensions, les composantes u, v, w du courant sont des dimensions de $L^{-\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}$.

Potentiel d'une masse électrique. — La formule (e) devient

$$\Phi Q = \mathfrak{C},$$

et l'on en conclut, pour l'unité de ce potentiel,

$$[\Phi] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}].$$

Résistance d'un courant linéaire. — En divisant $[\Phi]$ par $[I]$, on obtient

$$[R] = [LT^{-1}];$$

cette résistance est, par conséquent, une vitesse.

La résistance spécifique d'un conducteur est homogène avec L^2T^{-1}, et sa conductibilité spécifique avec $L^{-2}T$.

Capacité d'un condensateur. — On a pour l'unité

$$[A] = [L^{-1}T^2].$$

Quantité de magnétisme. — Pour déterminer son unité, nous emploierons encore la formule (f), et nous obtiendrons $[L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.

Potentiel d'une masse magnétique. — Il a pour unité $[L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}]$.

Coefficient d'induction d'un diélectrique. — Son unité a pour expression $[L^{-2}T^2]$.

Coefficient d'induction magnétique. — Le moment magnétique est homogène avec une masse magnétique divisée par le carré d'une ligne. Donc, d'après les équations de l'induction magnétique (*Théorie du potentiel*, IIe Partie, Chap. IV, n°s 19 et 21), le coefficient d'induction magnétique γ est sans degré.

Sur différentes expressions de la vitesse c.

9. Pour une portion de courant linéaire permanent, désignons dans le système électrostatique par i l'intensité du courant, par q la quantité d'électricité qui traverse une section dans le temps t, par r la résistance et par φ la force électromotrice. Puis, dans le système électromagnétique, désignons les mêmes quantités par les mêmes lettres, prises majuscules; nous aurons

$$q = c\mathrm{Q}, \qquad q = it, \qquad \mathrm{Q} = \mathrm{I}t,$$
$$\varphi = ir, \qquad \Phi = \mathrm{IR}, \qquad \varphi i = \Phi\mathrm{I}.$$

On tire de ces équations les valeurs suivantes de c :

$$c = \frac{q}{\mathrm{Q}} = \frac{i}{\mathrm{I}} = \frac{\Phi}{\varphi} = \sqrt{\frac{\mathrm{R}}{r}}.$$

On a aussi, pour le rapport des valeurs de la capacité d'un condensateur dans les deux systèmes,

$$\frac{a}{\mathrm{A}} = c^2.$$

On a donc, pour les rapports des unités correspondantes,

$$\frac{[q]}{[\mathrm{Q}]} = \frac{[i]}{[\mathrm{I}]} = \frac{[\Phi]}{[\varphi]} = \frac{1}{c},$$
$$\frac{[\mathrm{R}]}{[r]} = \frac{[a]}{[\mathrm{A}]} = \frac{1}{c^2}.$$

A chacun de ces rapports correspond une méthode d'expériences pour déterminer la quantité c, et toutes les recherches qui ont été faites à ce sujet ont donné à très peu près pour c la même valeur.

Remarque. — Si nous désignons par φ le potentiel d'une masse électrique située à l'intérieur d'un corps où sa densité est ∂ et à la surface de ce corps où sa densité est ρ, nous avons les formules de l'électrostatique

$$\varphi = \int \frac{\rho}{r}\, d\sigma + \int \frac{\partial}{r}\, d\varpi,$$
$$\Delta\varphi = -4\pi\partial, \qquad \frac{d\varphi}{dn} + \frac{d\varphi}{dn'} = -4\pi\rho,$$

qui deviennent dans le système électromagnétique

$$\Phi = c^2 \int \frac{P}{r}\, d\sigma + c^2 \int \frac{D}{r}\, d\varpi,$$

$$\Delta\Phi = -4\pi D c^2, \qquad \frac{d\Phi}{dn} + \frac{d\Phi}{dn'} = -4\pi c^2 P.$$

Système C.G.S. *et système pratique.*

10. On est convenu maintenant de prendre pour unités théoriques de longueur, de masse et de temps le centimètre, le gramme et la seconde; on désigne, pour abréger, le système électromagnétique correspondant par C.G.S. La valeur de c est alors

$$c = 298 \times 10^8.$$

L'unité de force dans ce système est la force qui, agissant sur le gramme pendant une seconde, lui communique une vitesse d'un centimètre. Or le poids d'un gramme communique à ce gramme une vitesse égale à $980^{cm},88$; donc l'unité de force est égale à $\frac{1^{gr}}{980,88}$; on l'appelle une *dyne*.

11. Un Congrès international des électriciens, tenu à Paris en 1881, a choisi des unités plus commodes pour les applications de l'électricité. Il a adopté les unités fondamentales suivantes :

Unité de longueur [L] $= 10^9$ centim. ou le quart du méridien terrestre,

Unité de masse [M] $= \frac{1}{10^{11}}$ masse du gramme,

Unité de temps [T] $= 1$ seconde.

Adoptant de plus le système électromagnétique, le Congrès en a conclu les unités suivantes de résistance, de force électromotrice, d'intensité de courant, de quantité d'électricité et de capacité dont

les valeurs sont données en unités du système C.G.S. :

$$[R] = [LT^{-1}] \quad = 10^{9} \text{ appelé } \textit{ohm},$$

$$[\Phi] = [L^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-2}] = 10^{8} \quad » \quad \textit{volta},$$

$$[I] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}} T^{-1}] = 10^{-1} \quad » \quad \textit{ampère},$$

$$[Q] = [L^{\frac{1}{2}} M^{\frac{1}{2}}] \quad = 10^{-1} \quad » \quad \textit{coulomb},$$

$$[A] = [L^{-1} T^{2}] \quad = 10^{-9} \quad » \quad \textit{farad}.$$

L'ampère est ainsi le courant produit par la force électromotrice d'un volta dans une longueur de fil qui a une résistance d'un ohm.

Le coulomb est la quantité d'électricité qui, dans une seconde, traverse la section d'un fil parcouru par un courant égal à un ampère.

Le farad est la capacité d'un condensateur dont la charge est un coulomb et dont la différence de potentiel des armatures est un volta.

Dans ce système, on a pour l'unité de force

$$[MLT^{-2}] = \frac{1}{100} \text{ dyne} = \frac{1}{98088} \text{ gramme}.$$

Les noms de *volta* et de *ohm* sont justement employés; car Volta a donné le premier la notion de la force électromotrice et Ohm celle de la résistance. Les découvertes d'Ampère sur les courants justifient le mot d'*ampère* attribué à l'unité de courant. Mais le nom de Coulomb, dont les découvertes se rapportent à l'Électrostatique et au Magnétisme, ne paraît pas aussi bien appliqué à une unité d'électricité qui est définie par la considération d'un courant. Le nom de W. Weber, d'après ses recherches, semble, au contraire, indiqué pour cette unité.

CHAPITRE VIII.

SUR LE MOUVEMENT VARIABLE DE L'ÉLECTRICITÉ DANS LES CONDUCTEURS DE FORME QUELCONQUE.

Nous avons étudié d'une manière générale le mouvement variable de l'électricité dans les conducteurs linéaires; nous avons aussi considéré pour des cas particuliers ce mouvement variable dans des plaques minces. Maintenant, dans ce Chapitre, nous allons nous occuper, dans toute leur généralité, des équations du mouvement variable de l'électricité dans des conducteurs à trois dimensions, supposés immobiles.

Force électromotrice d'induction sur un courant linéaire.

1. D'après ce que nous avons vu (Chap. III, n° 14), la force électromotrice d'induction, produite par des courants sur un courant linéaire fermé immobile s, est donnée par la formule

$$(a) \qquad \frac{d\Pi}{dt} = \int \left(\chi_x \frac{dx}{ds} + \chi_y \frac{dy}{ds} + \chi_z \frac{dz}{ds} \right) ds,$$

où χ_x, χ_y, χ_z se réduisent à $-\frac{dF}{dt}$, $-\frac{dG}{dt}$, $-\frac{dH}{dt}$, si l'on désigne par F, G, H les fonctions suivantes

$$F = \sum i' \int \frac{1}{r} \frac{dx'}{ds'} ds', \qquad G = \sum i' \int \frac{1}{r} \frac{dy'}{ds'} ds', \qquad H = \sum i' \int \frac{1}{r} \frac{dz'}{ds'} ds',$$

dans lesquelles i' est l'intensité d'un courant linéaire inducteur, ds' un élément linéaire de ce courant, r la distance du point (x', y', z') de ds' au point (x, y, z) de ds et le signe de sommation $\sum$ s'étendant à tous les courants inducteurs. Si les courants inducteurs sont distribués

d'une manière continue dans des conducteurs à trois dimensions, on remplacera, comme au Chapitre IV (n° 6), les dernières expressions par les suivantes

$$F = \int \frac{u'}{r} d\varpi', \qquad G = \int \frac{v'}{r} d\varpi', \qquad H = \int \frac{w'}{r} d\varpi',$$

u', v', w' étant les composantes du courant au point (x', y', z'), situé dans l'élément de volume $d\varpi'$.

Il résulte de la formule (a) que la force électromotrice, produite sur l'élément ds d'un courant fermé, peut être représentée par l'expression

$$\left(\chi_x \frac{dx}{ds} + \chi_y \frac{dy}{ds} + \chi_z \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

où χ_x, χ_y, χ_z ont les valeurs indiquées ci-dessus; mais, plus généralement, on peut prendre

$$\chi_x = -\frac{dF}{dt} - \frac{d^2\psi}{dx\,dt},$$

$$\chi_y = -\frac{dG}{dt} - \frac{d^2\psi}{dy\,dt},$$

$$\chi_z = -\frac{dH}{dt} - \frac{d^2\psi}{dz\,dt},$$

ψ étant une fonction de x, y, z et t; car l'expression (a) conservera la même valeur, quelle que soit la fonction ψ; mais, si le courant s n'était pas fermé, l'expression (a) changerait avec cette fonction.

Toutefois, d'après la signification physique de χ_x, χ_y, χ_z, la fonction ψ doit satisfaire à certaines conditions; elle doit être une intégrale étendue aux corps inducteurs, dont chaque élément est proportionnel à l'intensité du courant inducteur. Il est aussi naturel de supposer que les dérivées de ces éléments par rapport à x, y, z varient, de même que les éléments de F, G, H, avec la distance r et proportionnellement à $\frac{1}{r}$.

Pour nous conformer aux notations de M. Helmholtz, posons

$$\psi = \frac{1-k}{2}\Psi,$$

k étant une constante; M. Helmholtz est ainsi conduit à prendre

$$\Psi = \int \mathrm{I}' \frac{dr}{ds'} d\varpi',$$

I′ étant l'intensité du courant au point (x', y', z') et ds' étant l'arc infiniment petit, suivant lequel se meut le courant. Nous aurons donc

$$(1)\qquad \left\{ \begin{aligned} \Psi &= \int \mathrm{I}' \left(\frac{dr}{dx'}\frac{dx'}{ds'} + \frac{dr}{dy'}\frac{dy'}{ds'} + \frac{dr}{dz'}\frac{dz'}{ds'} \right) d\varpi' \\ &= \int \left(u' \frac{dr}{dx'} + v' \frac{dr}{dy'} + w \frac{dr}{dz'} \right) d\varpi'; \end{aligned} \right.$$

et il en résulte

$$\frac{d\Psi}{dx} = \int \left(u' \frac{d^2 r}{dx\, dx'} + v' \frac{d^2 r}{dx\, dy'} + w' \frac{d^2 r}{dx\, dz'} \right) d\varpi'$$

ou

$$\frac{d\Psi}{dx} = \int \left[-u' + \frac{x - x'}{r} \left(u' \frac{x - x'}{r} + v' \frac{y - y'}{r} + w' \frac{z - z'}{r} \right) \right] \frac{d\varpi'}{r}.$$

Posons

$$(2)\qquad \mathcal{F} = \mathrm{F} + \frac{1 - k}{2} \frac{d\Psi}{dx}, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{G} + \frac{1 - k}{2} \frac{d\Psi}{dy}, \qquad \mathcal{H} = \mathrm{H} + \frac{1 - k}{2} \frac{d\Psi}{dz},$$

et nous aurons, pour les composantes de la force électromotrice d'induction au point (x, y, z),

$$\chi_x = -\frac{d\mathcal{F}}{dt}, \qquad \chi_y = -\frac{d\mathcal{G}}{dt}, \qquad \chi_z = -\frac{d\mathcal{H}}{dt}.$$

Équations du mouvement variable de l'électricité.

2. Supposons maintenant des courants distribués d'une manière continue à l'intérieur de corps conducteurs homogènes, et conservons les notations du numéro précédent. Les expressions de F, G, H et Ψ seront ainsi des intégrales étendues à tous les volumes des conducteurs traversés par les courants.

Ces conducteurs possèdent, en général, de l'électricité libre à leur intérieur et à leur surface : désignons par φ le potentiel de cette élec-

tricité. Les surfaces de ces conducteurs seront, en outre, recouvertes de doubles couches, dont nous désignerons le potentiel par 0.

Si l'on appelle D la densité de l'électricité à l'intérieur d'un des conducteurs, on aura l'équation

$$\Delta\varphi = -4\pi c^2 \mathrm{D}$$

(Chap. VII, n° 9), et, d'après une formule démontrée (Chap. I, n° 5), si l'on désigne par u, v, w les composantes du courant au point (x, y, z), on obtient

$$-\frac{d\mathrm{D}}{dt} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}.$$

Désignons par σ la surface d'un des conducteurs, par dn et dn' les éléments de normale à cette surface menés extérieurement et intérieurement, enfin par ρ la densité de l'électricité sur la surface σ; nous aurons

$$-4\pi c^2 \rho = \frac{d\varphi}{dn'} + \frac{d\varphi}{dn}.$$

Ensuite, si λ, μ, ν sont les angles de la normale intérieure à la surface σ avec les axes de coordonnées, nous obtiendrons (Chap. I, n° 8),

$$\frac{d\rho}{dt} = -u\cos\lambda - v\cos\mu - w\cos\nu.$$

3. Intégrons l'expression (1) de Ψ par parties, et nous aurons

$$\Psi = -\int (u'\cos\lambda + v'\cos\mu + w'\cos\nu) r\, d\sigma - \int r\left(\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}\right) d\varpi'$$

ou

$$\Psi = \int \frac{d\rho}{dt} r\, d\sigma + \int \frac{d\mathrm{D}}{dt} r\, d\varpi';$$

ainsi Ψ représente le second potentiel d'une masse superficielle et d'une masse distribuée dans les conducteurs (*Théorie du potentiel*, Chap. III, n° 18). On en déduit

$$\frac{d\Psi}{dx} = \int \frac{d\rho}{dt}\frac{dr}{dx} d\sigma + \int \frac{d\mathrm{D}}{dt}\frac{dr}{dx} d\varpi',$$

et $\frac{dr}{dx}$ est égal à $\cos\alpha$, α étant l'angle de r avec l'axe des x. Si le point (x, y, z) est à une distance très grande, $\cos\alpha$ sera à très peu près constant, et, par suite, cette dérivée de Ψ sera nulle à l'infini, si la masse totale de l'électricité est nulle, quel que soit t.

La formule précédente peut s'écrire ainsi

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{dr}{dx'}\left(\frac{d^2\varphi}{dt\,dn'} + \frac{d^2\varphi}{dt\,dn}\right)d\sigma + \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{dr}{dx'}\,\frac{d\,\Delta\varphi}{dt}\,d\varpi',$$

et la dernière intégrale peut être étendue en dehors des volumes renfermés dans les surfaces σ, puisqu'on ne lui ajoutera de cette façon que des éléments nuls. Or soient, en général, A et B deux fonctions finies et continues des coordonnées x', y', z' d'un point de l'espace, et dont les dérivées peuvent être discontinues à travers les surfaces fermées σ. De l'origine des coordonnées comme centre, décrivons une sphère S d'un rayon très grand R, qui renferme toutes ces surfaces; nous aurons l'équation

$$\int \mathrm{A}\left(\frac{d\mathrm{B}}{dn'} + \frac{d\mathrm{B}}{dn}\right)d\sigma + \int \mathrm{A}\,\Delta\mathrm{B}\,d\varpi - \int \mathrm{A}\,\frac{d\mathrm{B}}{d\mathrm{R}}\,d\mathrm{S}$$
$$= \int \mathrm{B}\left(\frac{d\mathrm{A}}{dn'} + \frac{d\mathrm{A}}{dn}\right)d\sigma + \int \mathrm{B}\,\Delta\mathrm{A}\,d\varpi - \int \mathrm{B}\,\frac{d\mathrm{A}}{d\mathrm{R}}\,d\mathrm{S},$$

où les secondes intégrales des deux membres s'étendent à tout le volume renfermé dans la sphère. On obtiendra cette équation en appliquant une formule bien connue à chaque espace renfermé dans une surface σ et aussi à l'espace renfermé entre les surfaces σ et la surface S, puis ajoutant toutes ces équations. On pourra supposer que le rayon R de la sphère devient infini, et négliger les troisièmes intégrales si le facteur, qui multiplie l'élément dS dans les troisièmes intégrales, est de l'ordre de $\frac{1}{\mathrm{R}^3}$. D'après cela, φ étant de l'ordre de $\frac{1}{\mathrm{R}^2}$ sur S, on obtient

$$\frac{d\Psi}{dx} = \frac{1}{4\pi c^2}\int \frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d\,\Delta r}{dx'}\,d\varpi',$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace. Or on a $\Delta r = \frac{2}{r}$, et il en

résulte

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{1}{2\pi c^2}\int \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{r}\right)d\varpi'; \tag{3}$$

on a de même les dérivées de Ψ par rapport à y et z.

Il semble résulter de là qu'on ait

$$\Psi = -\frac{1}{2\pi c^2}\int \frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dt}\,d\varpi' + \text{const.};$$

mais cette intégrale étendue à tout l'espace serait infinie ou indéterminée. Néanmoins, l'équation (3) étant exacte, ainsi que les deux équations semblables, on en conclut

$$\Delta\Psi = \frac{2}{c^2}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{4}$$

L'intégrale (3) étant étendue à tout l'espace, on peut la transformer en la suivante :

$$\frac{d\Psi}{dx} = -\frac{1}{2\pi c^2}\int \frac{d^2\varphi}{dt\,dx'}\frac{1}{r}\,d\varpi'.$$

Ainsi cette dérivée de Ψ peut être considérée comme le potentiel d'une masse dont la densité est $-\frac{1}{2\pi c^2}\frac{d^2\varphi}{dt\,dx'}$ en tout point (x', y', z') de l'espace. Cette densité sera, en général, partout finie; on en conclut que les dérivées secondes de Ψ sont partout continues.

En se servant des expressions (2) de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et en ayant égard à l'équation (4), on obtient

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{F} = \dfrac{1-k}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dx\,dt} - 4\pi u, \\ \Delta\mathcal{G} = \dfrac{1-k}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dy\,dt} - 4\pi v, \\ \Delta\mathcal{H} = \dfrac{1-k}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dz\,dt} - 4\pi w. \end{cases} \tag{5}$$

Des mêmes expressions (2), il résulte

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz} = \frac{1-k}{2}\Delta\Psi - \int\left(u'\frac{dr^{-1}}{dx'} + v'\frac{dr^{-1}}{dy'} + w'\frac{dr^{-1}}{dz'}\right)d\varpi';$$

la dernière intégrale, précédée de son signe, peut se transformer de la manière suivante

$$\int (u'\cos\lambda + v'\cos\mu + w'\cos\nu)\frac{d\sigma}{r} + \int\left(\frac{du'}{dx'} + \frac{dv'}{dy'} + \frac{dw'}{dz'}\right)\frac{d\varpi'}{r}$$
$$= -\int \frac{d\rho}{dt}\frac{d\sigma}{r} - \int \frac{d\mathrm{D}}{dt}\frac{d\varpi}{r} = -\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

s'il n'entre aucun courant par les surfaces du conducteur. En se servant de l'équation (4), on obtient donc

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} + \frac{d\mathfrak{G}}{dy} + \frac{d\mathfrak{H}}{dz} = -\frac{k}{c^2}\frac{d\varphi}{dt}.$$

4. Désignons par R la résistance spécifique dans chaque conducteur; la force électromotrice en un point de ce conducteur a pour composantes Ru, Rv, Rw, et elle se compose de la force qui provient de l'électricité libre, de la force qui provient des doubles couches dont le potentiel est θ, et enfin de la force électromotrice d'induction dont les composantes sont

$$-\frac{d\mathfrak{F}}{dt}, \quad -\frac{d\mathfrak{G}}{dt}, \quad -\frac{d\mathfrak{H}}{dt};$$

nous avons ainsi les trois équations suivantes :

$$(a) \qquad \begin{cases} \mathrm{R}u = -\dfrac{d\varphi}{dx} - \dfrac{d\theta}{dx} - \dfrac{d\mathfrak{F}}{dt}, \\ \mathrm{R}v = -\dfrac{d\varphi}{dy} - \dfrac{d\theta}{dy} - \dfrac{d\mathfrak{G}}{dt}, \\ \mathrm{R}w = -\dfrac{d\varphi}{dz} - \dfrac{d\theta}{dz} - \dfrac{d\mathfrak{H}}{dt}. \end{cases}$$

En portant ces valeurs de u, v, w dans les équations (5) et posant

$$1 - k = h,$$

nous aurons les équations suivantes à l'intérieur des conducteurs que

nous appellerons Λ :

$$(b)\qquad \begin{cases} \Delta\mathcal{F} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dx\,dt} = \dfrac{4\pi}{R}\left(\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\vartheta}{dx} + \dfrac{d\mathcal{F}}{dt}\right), \\ \Delta\mathcal{G} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dy\,dt} = \dfrac{4\pi}{R}\left(\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{d\vartheta}{dy} + \dfrac{d\mathcal{G}}{dt}\right), \\ \Delta\mathcal{H} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dz\,dt} = \dfrac{4\pi}{R}\left(\dfrac{d\varphi}{dz} + \dfrac{d\vartheta}{dz} + \dfrac{d\mathcal{H}}{dt}\right). \end{cases}$$

Dans certains conducteurs B, les courants peuvent être regardés comme donnés s'ils sont produits par des piles hydro-électriques de très grande intensité et si la résistance des conducteurs B est très grande par rapport à celle des conducteurs A, en sorte que l'induction des conducteurs A sur les conducteurs B soit négligeable. Supposons, par exemple, que les conducteurs B se réduisent à des fils excités par des piles hydro-électriques; on pourra commencer par étudier le mouvement de l'électricité dans ces fils, d'après ce qu'on a vu au Chapitre III. Désignons par u_1, v_1, w_1 les composantes du courant dans les conducteurs B, puis représentons par $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$ les parties de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ relatives aux courants des conducteurs B, et par $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{H}_1$ les parties correspondantes dans les conducteurs A. On calculera $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$ d'après les valeurs de u_1, v_1, w_1, et il restera à déterminer les parties restantes $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{H}_1$.

Si l'on fait mouvoir des aimants aux environs des conducteurs A, les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ prendront des parties correspondant à ce mouvement (Chap. III, n° 1), parties qui pourront aussi être considérées comme données.

Désignons par $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}'$, φ', θ' ce que deviennent $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, φ, θ en dehors des conducteurs. Nous aurons, d'après le calcul qui a conduit aux équations (b),

$$(c)\qquad \begin{cases} \Delta\mathcal{F}' - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi'}{dx\,dt} = 0, \\ \Delta\mathcal{G}' - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi'}{dy\,dt} = 0, \\ \Delta\mathcal{H}' - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi'}{dz\,dt} = 0. \end{cases}$$

Puis, d'après la dernière équation du n° 3, nous obtenons

$$(d)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\mathcal{F}}{dx}+\dfrac{d\mathcal{G}}{dy}+\dfrac{d\mathcal{H}}{dz}=-\dfrac{k}{c^2}\dfrac{d\varphi}{dt}, \\ \dfrac{d\mathcal{F}'}{dx}+\dfrac{d\mathcal{G}'}{dy}+\dfrac{d\mathcal{H}'}{dz}=-\dfrac{k}{c^2}\dfrac{d\varphi'}{dt}. \end{cases}$$

En outre, sur les surfaces des conducteurs, nous aurons

$$\mathcal{F}=\mathcal{F}', \qquad \mathcal{G}=\mathcal{G}', \qquad \mathcal{H}=\mathcal{H}',$$
$$\frac{d\mathcal{F}}{dn}=\frac{d\mathcal{F}'}{dn}, \qquad \frac{d\mathcal{G}}{dn}=\frac{d\mathcal{G}'}{dn}, \qquad \frac{d\mathcal{H}}{dn}=\frac{d\mathcal{H}'}{dn},$$

et $\mathcal{F}'$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}'$, à une distance infiniment grande r, sont de l'ordre de $\frac{1}{r}$, r étant pris à partir d'un point quelconque des conducteurs.

Toutes ces équations ont été données par M. Helmholtz (¹), sauf l'introduction que j'ai faite du potentiel θ des doubles couches, qui satisfait, dans les conducteurs, à l'équation

$$\Delta\theta=0.$$

Les fonctions φ et θ satisfont sur les surfaces σ des conducteurs aux conditions

$$\varphi=\varphi', \qquad \frac{d\theta}{dn}=\frac{d\theta'}{dn}.$$

Enfin, en dehors des conducteurs, nous admettons que le potentiel de toute l'électricité est nul ou qu'on a

$$\varphi'+\theta'=0,$$

et φ' et θ' satisfont séparément aux équations

$$\Delta\varphi'=0, \qquad \Delta\theta'=0;$$

φ' et θ' sont d'ailleurs de l'ordre de $\frac{1}{r^2}$ à l'infini.

(¹) *Wissenschaftliche Abhandlungen* von Helmholtz, t. I, p. 545.

Énergie de toutes les actions électriques.

5. D'après le raisonnement qui a été fait (Chap. I, n° 11), on reconnaît que le travail élémentaire produit pendant l'instant dt, dans l'élément de volume $d\varpi$ d'un conducteur, est égal à

$$(\psi_x u + \psi_y v + \psi_z w)\, d\varpi\, dt,$$

en désignant par ψ_x, ψ_y, ψ_z les composantes de la force électromotrice dans cet élément. Si l'on remplace ψ_x, ψ_y, ψ_z par leurs valeurs Ru, Rv, Rw, cette expression peut aussi s'écrire

$$R(u^2 + v^2 + w^2)\, d\varpi\, dt.$$

Substituons à ψ_x, ψ_y, ψ_z les valeurs (a) du n° 4 et intégrons dans toute l'étendue des conducteurs; nous aurons, pour le travail élémentaire effectué dans tous les conducteurs,

$$(e)\qquad \left\{\begin{aligned} &dt\int R(u^2+v^2+w^2)\,d\varpi \\ &\quad = -\,dt\int\left(u\frac{d\mathcal{F}}{dt} + v\frac{d\mathcal{G}}{dt} + w\frac{d\mathcal{H}}{dt}\right)d\varpi \\ &\qquad -\,dt\int\left[u\frac{d(\varphi+\theta)}{dx} + v\frac{d(\varphi+\theta)}{dy} + w\frac{d(\varphi+\theta)}{dz}\right]d\varpi. \end{aligned}\right.$$

Cette quantité, prise avec un signe contraire, représente la variation élémentaire de l'énergie.

Posons

$$(f)\qquad \Phi = \frac{1}{2}\int(\mathcal{F}u + \mathcal{G}v + \mathcal{H}w)\,d\varpi,$$

l'intégrale étant étendue à tous les conducteurs. D'après les expressions de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ (n° 1), celle de Φ reste invariable quand on permute u, v, w, x, y, z respectivement avec u', v', w', x', y', z'. Il en résulte qu'on obtient le même résultat en différentiant Φ par rapport à t, soit qu'on regarde u, v, w comme seuls variables, soit qu'on regarde comme tels seulement u', v', w'. Ces six quantités varient toutes en même temps;

on a donc

$$\int\left(u\frac{d\mathcal{F}}{dt}+v\frac{d\mathcal{G}}{dt}+w\frac{d\mathcal{H}}{dt}\right)d\varpi=\int\left(\mathcal{F}\frac{du}{dt}+\mathcal{G}\frac{dv}{dt}+\mathcal{H}\frac{dw}{dt}\right)d\varpi=\frac{d\Phi}{dt},$$

ce qui donne la première intégrale du second membre de (e); ainsi Φ représente l'énergie des courants.

6. Transformons l'expression (f) de Φ. Pour cela, remplaçons les quantités u, v, w par leurs valeurs tirées des équations (5) [n° 3]; nous aurons

$$\Phi=-\frac{1}{8\pi}\int\left[\mathcal{F}\Delta\mathcal{F}+\mathcal{G}\Delta\mathcal{G}+\mathcal{H}\Delta\mathcal{H}-\left(\frac{1-k}{c^2}\right)\left(\mathcal{F}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt}+\mathcal{G}\frac{d^2\varphi}{dy\,dt}+\mathcal{H}\frac{d^2\varphi}{dz\,dt}\right)\right]d\varpi,$$

cette intégrale étant étendue aux volumes de tous les conducteurs; mais, d'après les équations (c), nous pouvons l'étendre à tout l'espace. Intégrons par parties et appuyons-nous sur les conditions aux limites auxquelles satisfont $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, φ et sur l'équation

$$-\frac{k}{c^2}\frac{d\varphi}{dt}=\frac{d\mathcal{F}}{dx}+\frac{d\mathcal{G}}{dy}+\frac{d\mathcal{H}}{dz};$$

nous obtiendrons

$$\begin{aligned}\Phi=\frac{1}{8\pi}\int\Big[&\left(\frac{d\mathcal{F}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{F}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{F}}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{G}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{G}}{dy}\right)^2\\&+\left(\frac{d\mathcal{G}}{dz}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{H}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{H}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{H}}{dz}\right)^2\Big]d\varpi\\&+\frac{1-k}{8\pi k}\int\left(\frac{d\mathcal{F}}{dx}+\frac{d\mathcal{G}}{dy}+\frac{d\mathcal{H}}{dz}\right)^2d\varpi.\end{aligned}$$

La quantité entre crochets dans cette expression peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\mathcal{F}}{dy}-\frac{d\mathcal{G}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{G}}{dz}-\frac{d\mathcal{H}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{H}}{dx}-\frac{d\mathcal{F}}{dz}\right)^2\\&\quad+\left(\frac{d\mathcal{F}}{dx}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{G}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathcal{H}}{dz}\right)^2+2\frac{d\mathcal{G}}{dz}\frac{d\mathcal{H}}{dy}+2\frac{d\mathcal{H}}{dx}\frac{d\mathcal{F}}{dz}+2\frac{d\mathcal{F}}{dy}\frac{d\mathcal{G}}{dx}.\end{aligned}$$

En remplaçant dans Φ, on a

$$\Phi = \frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dy}-\frac{dG}{dx}\right)^2+\left(\frac{dG}{dz}-\frac{d\mathfrak{H}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dx}-\frac{d\mathfrak{H}}{dz}\right)^2\right]d\varpi$$
$$+\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dx}\right)^2+\left(\frac{dG}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dz}\right)^2+2\frac{dG}{dz}\frac{d\mathfrak{H}}{dy}\right.$$
$$\left.+2\frac{d\mathfrak{H}}{dx}\frac{d\mathfrak{H}}{dz}+2\frac{d\mathfrak{H}}{dy}\frac{dG}{dx}+\frac{1-k}{k}\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{d\mathfrak{H}}{dz}\right)^2\right]d\varpi.$$

Or on a

$$\int\frac{d\mathfrak{H}}{dy}\frac{dG}{dx}d\varpi=\int\frac{d\mathfrak{H}}{dx}\frac{dG}{dy}d\varpi,$$

comme on le voit en intégrant par parties et en se servant des conditions aux limites. Il en résulte qu'on peut remplacer la seconde intégrale renfermée dans Φ par la suivante :

$$\frac{1}{8\pi k}\int\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dx}+\frac{dG}{dy}+\frac{d\mathfrak{H}}{dz}\right)^2d\varpi.$$

On a donc enfin

$$\Phi=\frac{1}{8\pi}\int\left[\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dy}-\frac{dG}{dx}\right)^2+\left(\frac{dG}{dz}-\frac{d\mathfrak{H}}{dy}\right)^2+\left(\frac{d\mathfrak{H}}{dx}-\frac{d\mathfrak{H}}{dz}\right)^2+\frac{k}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]d\varpi$$

pour l'expression de l'énergie des courants; cette formule a été donnée par M. Helmholtz.

7. Examinons ensuite la seconde partie de la formule (*e*), où l'intégrale

$$\frac{dP}{dt}=\int\left[u\frac{d(\varphi+\theta)}{dx}+v\frac{d(\varphi+\theta)}{dy}+w\frac{d(\varphi+\theta)}{dz}\right]d\varpi;$$

en ajoutant P à Φ, on aura l'énergie totale des actions électriques.

Cette formule peut se transformer de la manière suivante :

$$\frac{dP}{dt}=-\int(\varphi+\theta)(u\cos\lambda+v\cos\mu+w\cos\nu)\,d\sigma-\int(\varphi+\theta)\left(\frac{du}{dx}+\frac{dv}{dy}+\frac{dw}{dz}\right)d\varpi$$
$$=\int(\varphi+\theta)\frac{d\rho}{dt}d\sigma+\int(\varphi+\theta)\frac{dD}{dt}d\varpi$$
$$=-\frac{1}{4\pi c^2}\int(\varphi+\theta)\left(\frac{d^2\varphi}{dn'dt}+\frac{d^2\varphi'}{dn\,dt}\right)d\sigma-\frac{1}{4\pi c^2}\int(\varphi+\theta)\frac{d\Delta\varphi}{dt}d\varpi.$$

Ensuite, l'électricité dont le potentiel est $\varphi + \theta$ n'ayant pas d'action extérieure, on a sur la surface σ

$$\frac{d\varphi'}{dn} + \frac{d\theta'}{dn} = 0;$$

on a aussi sur cette surface

$$\frac{d\theta'}{dn} + \frac{d\theta}{dn'} = 0;$$

il en résulte

$$\frac{d\varphi'}{dn} = \frac{d\theta}{dn'},$$

et la formule précédente devient

$$\frac{dP}{dt} = -\frac{1}{4\pi c^2}\int(\varphi+\theta)\frac{d^2(\varphi+\theta)}{dn'\,dt}d\sigma - \frac{1}{4\pi c^2}\int(\varphi+\theta)\frac{d\Delta(\varphi+\theta)}{dt}d\varpi$$
$$= \frac{1}{4\pi}\int\left[\frac{d(\varphi+\theta)}{dx}\frac{d^2(\varphi+\theta)}{dx\,dt} + \frac{d(\varphi+\theta)}{dy}\frac{d^2(\varphi+\theta)}{dy\,dt} + \frac{d(\varphi+\theta)}{dz}\frac{d^2(\varphi+\theta)}{dz\,dt}\right]d\varpi.$$

On en conclut enfin

$$P = \frac{1}{8\pi}\int\left\{\left[\frac{d(\varphi+\theta)}{dx}\right]^2 + \left[\frac{d(\varphi+\theta)}{dy}\right]^2 + \left[\frac{d(\varphi+\theta)}{dz}\right]^2\right\}d\varpi;$$

cette intégrale est étendue à tous les volumes des conducteurs, mais on peut aussi la supposer étendue à tout l'espace, puisque $\varphi + \theta$ est nul en dehors des conducteurs.

Système unique de solutions des équations du mouvement de l'électricité.

8. On peut démontrer que les équations précédentes n'admettent qu'un système de solutions, lorsque la quantité k est positive.

Supposons l'état initial donné; ainsi $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, φ, θ sont donnés pour $t = 0$.

S'il existe deux systèmes différents de solutions, désignons par $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{H}_1$, φ_1, θ_1 les valeurs des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, φ, θ pour un système et par $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$, φ_2, θ_2 les valeurs des mêmes fonctions pour l'autre sys-

tème. Alors, si nous posons

$$\mathcal{F}_1-\mathcal{F}_2=\mathcal{F},\qquad \mathcal{G}_1-\mathcal{G}_2=\mathcal{G},\qquad \mathcal{H}_1-\mathcal{H}_2=\mathcal{H},\qquad \varphi_1-\varphi_2=\varphi,\qquad \theta_1-\theta_2=\theta,$$

ces différences satisferont aux mêmes équations, et, d'après l'hypothèse, elles sont nulles pour $t=0$. Donc les fonctions Φ et P des numéros précédents seront aussi nulles à cet instant. Nous avons d'ailleurs

$$\frac{d\Phi}{dt}+\frac{d\mathrm{P}}{dt}=-\int \mathrm{R}(u^2+v^2+w^2)\,d\varpi;$$

$\Phi+\mathrm{P}$ est nul pour $t=0$, et, comme l'énergie $\Phi+\mathrm{P}$ est toujours positive, $\frac{d(\Phi+\mathrm{P})}{dt}dt$, valeur de $\Phi+\mathrm{P}$ après le premier instant, est positif, à moins qu'il ne soit nul; or il ne peut être positif d'après l'équation précédente; donc $\frac{d(\Phi+\mathrm{P})}{dt}$ est nul; ainsi $\Phi+\mathrm{P}$ reste nul après l'instant dt, et l'on voit, de même, qu'il sera nul dans tous les instants suivants. Comme, de plus, Φ et P ne peuvent être négatifs, on a séparément

$$\Phi=0,\qquad \mathrm{P}=0.$$

De l'expression obtenue pour Φ(n° 6), on conclut

$$\frac{d\mathcal{F}}{dy}=\frac{d\mathcal{G}}{dx},\qquad \frac{d\mathcal{G}}{dz}=\frac{d\mathcal{H}}{dy},\qquad \frac{d\mathcal{H}}{dx}=\frac{d\mathcal{F}}{dz},\qquad \frac{d\varphi}{dt}=0,$$

et des équations (d) du n° 4 on déduit

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx}+\frac{d\mathcal{G}}{dy}+\frac{d\mathcal{H}}{dz}=0.$$

On a donc

$$\frac{d^2\mathcal{F}}{dx^2}+\frac{d^2\mathcal{F}}{dy^2}+\frac{d^2\mathcal{F}}{dz^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{d\mathcal{F}}{dx}+\frac{d\mathcal{G}}{dy}+\frac{d\mathcal{H}}{dz}\right)=0$$

et, par suite,

$$\Delta\mathcal{F}=0,\qquad \Delta\mathcal{G}=0,\qquad \Delta\mathcal{H}=0.$$

Or $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ et leurs dérivées premières sont partout continus; ils sont infiniment petits de l'ordre $\frac{1}{\mathrm{R}}$ à une distance R infiniment grande;

par suite, on a, dans tout l'espace,

$$\mathcal{F} = 0, \qquad \mathcal{G} = 0, \qquad \mathcal{H} = 0$$

(*Théorie du potentiel,* Chap. I, n° 15). La fonction P étant nulle, on a aussi

$$\frac{d(\varphi + \theta)}{dx} = 0, \qquad \frac{d(\varphi + \theta)}{dy} = 0, \qquad \frac{d(\varphi + \theta)}{dz} = 0.$$

φ est nul pour $t = 0$ et, d'après l'équation $\frac{d\varphi}{dt} = 0$, φ est constamment nul. Par suite aussi θ est nul, d'après les équations précédentes. Ainsi les deux systèmes de solutions des équations du mouvement de l'électricité ne peuvent différer l'un de l'autre.

La quantité k est nécessairement positive, comme on vient de le supposer; car l'énergie totale $\Phi + P$ des actions électriques doit être positive, et, si k était négatif, on pourrait disposer de la fonction φ, de manière que $\Phi + P$ fût négatif.

Force magnétique des courants.

9. Les composantes de la force magnétique seront données, comme dans le cas d'un mouvement permanent, par les formules

$$X = \frac{dH}{dy} - \frac{dG}{dz}, \qquad Y = \frac{dF}{dz} - \frac{dH}{dx}, \qquad Z = \frac{dG}{dx} - \frac{dF}{dy},$$

en posant

$$F = \int \frac{u}{r} d\varpi, \qquad G = \int \frac{v}{r} d\varpi, \qquad H = \int \frac{w}{r} d\varpi$$

(Chap. IV, n° 7). Or on a, d'après les notations du Chapitre actuel (n° 1),

$$\mathcal{F} = F + \frac{1 - k}{2} \frac{d\Psi}{dx}, \qquad \mathcal{G} = G + \frac{1 - k}{2} \frac{d\Psi}{dy}, \qquad \mathcal{H} = H + \frac{1 - k}{2} \frac{d\Psi}{dz};$$

par conséquent les expressions de X, Y, Z peuvent aussi s'écrire

$$X = \frac{d\mathcal{H}}{dy} - \frac{d\mathcal{G}}{dz}, \qquad Y = \frac{d\mathcal{F}}{dz} - \frac{d\mathcal{H}}{dx}, \qquad Z = \frac{d\mathcal{G}}{dx} - \frac{d\mathcal{F}}{dy}.$$

Sur l'intégration des équations du mouvement de l'électricité.

10. Si nous désignons par $\varkappa$ la conductibilité spécifique du conducteur, les équations (b) du n° 4 deviennent

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta\mathcal{F} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dx\,dt} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{d\mathcal{F}}{dt}\right), \\ \Delta\mathcal{G} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dy\,dt} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{d\theta}{dy} + \dfrac{d\mathcal{G}}{dt}\right), \\ \Delta\mathcal{H} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dz\,dt} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi}{dz} + \dfrac{d\theta}{dz} + \dfrac{d\mathcal{H}}{dt}\right), \end{cases}$$

et nous avons, en outre,

$$(2)\qquad \frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz} = -\frac{k}{c^2}\frac{d\varphi}{dt},$$

s'il n'entre pas d'électricité par la surface du conducteur.

Différentions les équations (1) respectivement par rapport à x, y, z et ajoutons; nous aurons l'équation

$$(3)\qquad \Delta\frac{d\varphi}{dt} + 4\pi\varkappa c^2\Delta\varphi - 4\pi\varkappa k\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0,$$

qui ne contient que φ, et la fonction θ satisfait à l'équation

$$\Delta\theta = 0.$$

11. Pour déterminer la forme des fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, posons d'abord

$$\mathcal{F} = \frac{d\chi}{dx},$$

et la première équation (1) deviendra

$$\Delta\frac{d\chi}{dx} - 4\pi\varkappa\frac{d^2\chi}{dx\,dt} = \frac{h}{c^2}\frac{d^2\varphi}{dx\,dt} + 4\pi\varkappa\frac{d(\varphi+\theta)}{dx};$$

on satisfera d'ailleurs à cette équation si l'on prend pour χ une solu-

tion de la suivante :

$$\Delta\chi - 4\pi\varkappa\frac{d\chi}{dt} = \frac{h}{c^2}\frac{d\varphi}{dt} + 4\pi\varkappa(\varphi+\theta). \tag{4}$$

Si nous faisons

$$\varphi = e^{\alpha t}\varphi_1, \qquad \theta = e^{\alpha t}\theta_1, \qquad \chi = e^{\alpha t}\tau,$$

nous aurons, au lieu de l'équation (3),

$$\Delta\varphi_1 - m\varphi_1 = 0,$$

en posant

$$m = \frac{4\pi k\varkappa\alpha^2}{\alpha + 4\pi\varkappa c^2}.$$

Si nous posons de plus

$$4\pi\varkappa\alpha = s, \qquad \frac{h\alpha}{c^2} + 4\pi\varkappa = b,$$

l'équation (4) deviendra

$$\Delta\tau - s\tau = b\varphi_1 + 4\pi\varkappa\theta_1. \tag{5}$$

Posons

$$\mathrm{N} = \frac{bc^2 + k\alpha}{c^2 s} = \frac{\alpha + 4\pi\varkappa c^2}{c^2 s},$$

et nous aurons une solution particulière de l'équation (5), en prenant

$$\tau_1 = -\mathrm{N}\varphi_1 - \frac{1}{\alpha}\theta_1, \tag{6}$$

comme on le vérifie en substituant cette expression dans (5) et en se servant des équations auxquelles φ_1 et θ_1 satisfont.

Pour avoir la solution la plus générale de (5), il faudra ajouter à l'expression (6) la solution la plus générale de l'équation

$$\Delta\lambda - s\lambda = 0, \tag{7}$$

et l'on voit aussi que, si τ_1 a la valeur (6) et que λ, λ_1, λ_2 soient des solutions de l'équation (7), on aura

$$\mathcal{F} = \left(\lambda + \frac{d\tau_1}{dx}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{G} = \left(\lambda_1 + \frac{d\tau_1}{dy}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{H} = \left(\lambda_2 + \frac{d\tau_1}{dz}\right)e^{\alpha t}.$$

En substituant ces fonctions dans l'équation (2), nous obtenons

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\lambda_1}{dy}+\frac{d\lambda_2}{dz}=-\Delta\tau_1-\frac{k}{c^2}\alpha\varphi_1=-s\tau_1-\mathrm{N}s\varphi_1-4\pi\varkappa\theta_1$$

ou

$$\frac{d\lambda}{dx}+\frac{d\lambda_1}{dy}+\frac{d\lambda_2}{dz}=0.$$

Si $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ se composent, comme nous avons dit au n° 4, de parties connues $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$ et de parties inconnues $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{H}_1$, représentons par

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_1&=e^{\alpha t}f_1, & \mathcal{G}_1&=e^{\alpha t}g_1, & \mathcal{H}_1&=e^{\alpha t}h_1,\\ \mathcal{F}_2&=e^{\alpha t}f_2, & \mathcal{G}_2&=e^{\alpha t}g_2, & \mathcal{H}_2&=e^{\alpha t}h_2,\end{aligned}$$

les parties de $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{G}_1$, $\mathcal{H}_1$ et de $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$ qui renferment $e^{\alpha t}$ en facteur, et nous aurons

$$f_1=\lambda+\frac{d\tau_1}{dx}-f_2, \qquad g_1=\lambda_1+\frac{d\tau_1}{dy}-g_2, \qquad h_1=\lambda_2+\frac{d\tau_1}{dz}-h_2.$$

Si α est imaginaire et égal à $p+q\sqrt{-1}$, il existera une autre valeur de α égale à $p-q\sqrt{-1}$ et, en additionnant les deux systèmes de solutions correspondant à ces deux valeurs de α, on obtiendra un système de solutions réelles pour les quantités φ, $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$.

12. Considérons ensuite les autres équations du n° 4

$$(9)\qquad \begin{cases}\Delta\mathcal{F}'-\dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi'}{dx\,dt}=0,\\ \Delta\mathcal{G}'-\dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi'}{dy\,dt}=0,\\ \Delta\mathcal{H}'-\dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi'}{dz\,dt}=0;\end{cases}$$

$$(10)\qquad \frac{d\mathcal{F}'}{dx}+\frac{d\mathcal{G}'}{dy}+\frac{d\mathcal{H}'}{dz}=-\frac{k}{c^2}\frac{d\varphi'}{dt}.$$

Si nous différentions les équations (9) respectivement par rapport à x, y, z, et si nous ajoutons, en nous servant de (10), nous aurons

$$\frac{d\,\Delta\varphi'}{dt}=0;$$

mais, comme le potentiel φ' satisfait à l'équation

$$\Delta\varphi' = 0,$$

l'équation précédente doit être supprimée.

Posons

$$\mathcal{F}' = \frac{d\chi'}{dx};$$

la première équation (9) deviendra

$$\Delta\chi' - \frac{h}{c^2}\frac{d\varphi'}{dt} = 0;$$

puis faisons

$$\varphi' = e^{\alpha t}\varphi'_1, \qquad \chi' = e^{\alpha t}\tau',$$

et nous aurons

$$\Delta\tau' - \frac{h\alpha}{c^2}\varphi'_1 = 0. \tag{11}$$

Désignons par τ'_1 une solution particulière de cette équation et par λ', λ'_1, λ'_2 des solutions de l'équation $\Delta\lambda' = 0$; nous pourrons poser

$$\mathcal{F}' = \left(\lambda' + \frac{d\tau'_1}{dx}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{G}' = \left(\lambda'_1 + \frac{d\tau'_1}{dy}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{H}' = \left(\lambda'_2 + \frac{d\tau'_1}{dz}\right)e^{\alpha t}.$$

Ensuite, de l'équation (10), nous concluons

$$\frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\lambda'_1}{dy} + \frac{d\lambda'_2}{dz} = -\frac{\alpha}{c^2}\varphi'_1. \tag{12}$$

Dans le cas où h sera nul ou k égal à 1, on fera $\tau'_1 = 0$. Dans le cas général, on déduit de (11)

$$\Delta\,\Delta\tau' = 0;$$

donc τ' est la somme du premier potentiel de couches distribuées sur les surfaces σ des conducteurs et du second potentiel d'autres couches situées sur les mêmes surfaces; ainsi l'on peut poser

$$\tau'_1 = \int \frac{\mu}{r}\,d\sigma + \int \mu_1 r\,d\sigma.$$

La fonction τ'_1 peut être réduite à la seconde intégrale; elle n'entre

que par ses dérivées par rapport à x, y, z, qui doivent s'annuler, quand le point (x, y, z) va à l'infini; ce qui exige que la masse $\int \mu_1 d\sigma$ relative au second potentiel soit nulle.

Si l'on admet que le potentiel total extérieur $\varphi' + \theta'$ est nul, on aura

$$\theta'_1 = -\varphi'_1.$$

On aura ensuite à appliquer les conditions aux limites. De ces conditions, on déduira une équation qui donnera pour la constante α une infinité de valeurs, et la solution générale du problème sera la somme des solutions particulières en nombre infini qui correspondent à ces valeurs de α. Si l'état électrique tend vers un état permanent, il faudra ajouter à la solution ainsi obtenue la solution relative à cet état permanent et qui sera indépendante de t.

13. Remarquons que la densité ρ de la simple couche située sur la surface σ est exprimée par deux formules. On a d'abord

$$-4\pi\rho = \frac{1}{c^2}\left(\frac{d\varphi}{dn'} + \frac{d\varphi'}{dn}\right) = \frac{1}{c^2}\frac{d(\varphi+\theta)}{dn'}$$

(n° 7); ρ est ensuite donné par la formule

$$\frac{d\rho}{dt} = -(u\cos\lambda + v\cos\mu + w\cos\nu),$$

et, en remplaçant u, v, w par leurs valeurs (n° 4),

$$\frac{d\rho}{dt} = \varkappa\frac{d(\varphi+\theta)}{dn'} + \varkappa\left(\frac{d\xi}{dt}\cos\lambda + \frac{d\eta}{dt}\cos\mu + \frac{d\zeta}{dt}\cos\nu\right).$$

En égalant les deux valeurs de ρ, on obtient cette équation à la surface

$$-\frac{1}{4\pi c^2}\frac{d^2(\varphi+\theta)}{dn'\,dt} = \varkappa\frac{d(\varphi+\theta)}{dn'} + \varkappa\left(\frac{d\xi}{dt}\cos\lambda + \frac{d\eta}{dt}\cos\mu + \frac{d\zeta}{dt}\cos\nu\right),$$

qu'il pourra être utile de considérer.

CHAPITRE IX.

FILS TÉLÉGRAPHIQUES.

Pour l'envoi d'une dépêche, l'extrémité du fil télégraphique, à la station de départ, est mise en communication alternativement avec le pôle positif d'une pile ou avec la Terre, tandis que le pôle négatif de cette pile est toujours lié avec le sol. D'autre part, la seconde extrémité du fil télégraphique est en communication avec la Terre, et elle fait mouvoir à la station d'arrivée un fer doux par l'intermédiaire d'un électro-aimant; elle produit ainsi des indications correspondant aux signaux de la station de départ.

Du mouvement variable de l'électricité dans un fil extrêmement long.

1. Nous allons nous occuper des équations du mouvement de l'électricité dans un fil conducteur homogène extrêmement long, comme le sont les fils télégraphiques. Nous prenons le fil rectiligne et d'une section circulaire constante, dont nous désignerons le rayon par a, et nous placerons l'axe des z des coordonnées rectangulaires suivant l'axe du fil. Toutefois, les calculs que nous allons faire sont également applicables à un fil courbe, pourvu que la courbure de son axe soit partout très petite par rapport à $\frac{1}{a}$ et que le fil ne soit pas replié, de manière que des parties éloignées dans l'état rectiligne du fil puissent s'influencer mutuellement. Alors la coordonnée z désignera la longueur de l'axe du fil, comptée à partir de l'extrémité par laquelle entre le courant.

Nous avons obtenu dans le Chapitre précédent les équations sui-

vantes, pour le mouvement de l'électricité dans un conducteur,

$$(1)\qquad \begin{cases} \Delta\mathcal{F} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dx\,dt} = 4\pi\kappa\left(\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{d\mathcal{F}}{dt}\right), \\ \Delta\mathcal{G} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dy\,dt} = 4\pi\kappa\left(\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{d\theta}{dy} + \dfrac{d\mathcal{G}}{dt}\right), \\ \Delta\mathcal{H} - \dfrac{h}{c^2}\dfrac{d^2\varphi}{dz\,dt} = 4\pi\kappa\left(\dfrac{d\varphi}{dz} + \dfrac{d\theta}{dz} + \dfrac{d\mathcal{H}}{dt}\right), \end{cases}$$

auxquelles il faut ajouter une quatrième équation que nous avons obtenue (n° 3), en supposant qu'il n'entre pas d'électricité par la surface du conducteur. Mais, si l est la longueur du fil, il entre un courant par l'extrémité $z = 0$, et il en sort un autre par l'extrémité $z = l$; puis il résulte du raisonnement même qui a été fait en cet endroit qu'il faut ajouter deux termes au second membre de cette équation, qui devient

$$(2)\qquad \frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz} = -\frac{k}{c^2}\frac{d\varphi}{dt} + \int w_0\frac{d\omega_0}{r} - \int w_1\frac{d\omega_1}{r},$$

si l'on désigne par w_0 et w_1 les valeurs de la composante w du courant aux deux extrémités du fil, et par $d\omega_0$ et $d\omega_1$ l'élément des deux surfaces des sections qui terminent le fil.

2. Nous allons montrer comment on peut remplacer le système des équations (1) et (2) par un autre qui n'en différera que par la suppression des deux derniers termes de l'équation (2). Pour cela, posons

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathcal{F} = (\mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2)e^{\alpha t}, & \mathcal{G} = (\mathcal{G}_1 + \mathcal{G}_2)e^{\alpha t}, & \mathcal{H} = (\mathcal{H}_1 + \mathcal{H}_2)e^{\alpha t}, \\ \varphi = (\varphi_1 + \varphi_2)e^{\alpha t}, & \theta = (\theta_1 + \theta_2)e^{\alpha t}, & \\ w_0 = \mathrm{W}_0 e^{\alpha t}, & w_1 = \mathrm{W}_1 e^{\alpha t}; & \end{cases}$$

puis faisons

$$\varphi_2 = \frac{c^2}{k\alpha}\left(\int \mathrm{W}_0\frac{d\omega_0}{r} - \int \mathrm{W}_1\frac{d\omega_1}{r}\right).$$

Comme nous serons conduits plus loin à faire $h = 0$ ou $k = 1$, faisons cette supposition qui simplifie le calcul actuel. Alors nous pourrons partager le système des équations (1) et (2) en deux autres. Le

premier sera

$$\Delta \mathcal{F}_1 = 4\pi\varkappa\left(\frac{d\varphi_1}{dx} + \frac{d\theta_1}{dx} + \alpha \mathcal{F}_1\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

$$\frac{d\mathcal{F}_1}{dx} + \frac{d\mathcal{G}_1}{dy} + \frac{d\mathcal{H}_1}{dz} = -\frac{\alpha}{c^2}\varphi_1,$$

c'est-à-dire les équations (1) et (2) dans lesquelles on a supprimé les deux derniers termes. Le second système se composera des équations

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} \Delta \mathcal{F}_2 = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \dfrac{d\theta_2}{dx} + \alpha \mathcal{F}_2\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{cases}$$

$$\text{(5)} \qquad \frac{d\mathcal{F}_2}{dx} + \frac{d\mathcal{G}_2}{dy} + \frac{d\mathcal{H}_2}{dz} = 0,$$

dans lesquelles φ_2 est une fonction connue. Il s'agit de trouver un système de solutions particulières des équations (4) et (5).

Comme les fonctions φ_2 et θ_2 satisfont aux équations

$$\Delta\varphi_2 = 0, \qquad \Delta\theta_2 = 0,$$

on obtiendra pour solutions des équations précédentes

$$\text{(6)} \qquad \begin{cases} \mathcal{F}_2 = -\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{d\varphi_2}{dx} + \dfrac{d\theta_2}{dx}\right), \\ \mathcal{G}_2 = -\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{d\varphi_2}{dy} + \dfrac{d\theta_2}{dy}\right), \\ \mathcal{H}_2 = -\dfrac{1}{\alpha}\left(\dfrac{d\varphi_2}{dz} + \dfrac{d\theta_2}{dz}\right). \end{cases}$$

Les fonctions $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$ satisfont ainsi elles-mêmes aux équations

$$\Delta \mathcal{F}_2 = 0, \qquad \Delta \mathcal{G}_2 = 0, \qquad \Delta \mathcal{H}_2 = 0;$$

il n'y a donc pas de courants intérieurs au fil, qui correspondent à ces valeurs de $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$, qui ne peuvent donc se rapporter qu'à des courants superficiels. D'ailleurs, les formules (6) expriment que la force électromotrice d'induction produite par le courant superficiel fait équilibre à la force électromotrice produite par le potentiel $\varphi_2 + \theta_2$.

En dehors du fil, les équations (1) et (2) sont remplacées par les suivantes, si l'on suppose $h = 0$,

$$(7)\quad \begin{cases} \Delta\mathcal{F}' = 0, \quad \Delta\mathcal{G}' = 0, \quad \Delta\mathcal{H}' = 0, \\ \dfrac{d\mathcal{F}'}{dx} + \dfrac{d\mathcal{G}'}{dy} + \dfrac{d\mathcal{H}'}{dz} = -\dfrac{1}{c^2}\dfrac{d\varphi'}{dt} + \int w_0 \dfrac{d\omega_0}{r} - \int w_1 \dfrac{d\omega_1}{r}. \end{cases}$$

Posons encore les formules (3), en accentuant les lettres $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$, φ, θ; puis, faisons

$$\varphi'_2 = \frac{c^2}{\alpha}\left(\int \frac{W_0}{r} d\omega_0 - \int \frac{W_1}{r} d\omega_1\right).$$

Alors le système des équations (7) pourra se partager en deux autres. Le premier système sera

$$\Delta\mathcal{F}'_1 = 0, \quad \Delta\mathcal{G}'_1 = 0, \quad \Delta\mathcal{H}'_1 = 0,$$
$$\frac{d\mathcal{F}'_1}{dx} + \frac{d\mathcal{G}'_1}{dy} + \frac{d\mathcal{H}'_1}{dz} = -\frac{\alpha}{c^2}\varphi'_1,$$

et donne les équations (7), dont on a supprimé les deux derniers termes. Le second système sera

$$\Delta\mathcal{F}'_2 = 0, \quad \Delta\mathcal{G}'_2 = 0, \quad \Delta\mathcal{H}'_2 = 0,$$
$$\frac{d\mathcal{F}'_2}{dx} + \frac{d\mathcal{G}'_2}{dy} + \frac{d\mathcal{H}'_2}{dz} = 0.$$

Nous satisferons à ce dernier système en posant

$$\mathcal{F}'_2 = \frac{dp}{dx}, \quad \mathcal{G}'_2 = \frac{dp}{dy}, \quad \mathcal{H}'_2 = \frac{dp}{dz},$$

p étant une fonction qui satisfait à $\Delta p = 0$. Posons ensuite l'équation

$$\varphi'_2 + \theta'_2 = 0,$$

et θ'_2 sera une fonction connue.

La fonction θ_2 sera donc une fonction déterminée à une constante près par l'équation

$$\Delta\theta_2 = 0$$

et par la condition à la surface

$$\frac{d\theta_2}{d\mathrm{R}} = \frac{d\theta'_2}{d\mathrm{R}} \qquad \text{pour } \mathrm{R} = a.$$

Si l'on calcule θ_2, on aura ensuite $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{G}_2$, $\mathcal{H}_2$ d'après les équations (6).

La fonction p n'est pas déterminée par ce calcul; de sa valeur on conclurait la nature de la couche de courant.

Pour $\mathrm{R} = a$, on a

$$\frac{d\theta_2}{d\mathrm{R}} = \frac{d\theta'_2}{d\mathrm{R}}, \qquad \frac{d\varphi_2}{d\mathrm{R}} = \frac{d\varphi'_2}{d\mathrm{R}};$$

donc

$$\frac{d(\varphi_2 + \theta_2)}{d\mathrm{R}} = 0;$$

il en résulte que $\mathcal{F}_2$ et $\mathcal{G}_2$ sont nuls pour $\mathrm{R} = a$. On voit de même qu'on a

$$\frac{d\mathcal{H}_2}{d\mathrm{R}} = 0 \qquad \text{pour } \mathrm{R} = a.$$

3. Maintenant que nous avons remplacé les systèmes d'équations (1), (2) et (7) par d'autres semblables, dans lesquelles les termes relatifs à l'entrée et à la sortie des courants ont disparu, nous pouvons appliquer la méthode d'intégration donnée aux nos 10, 11 et 12 du Chapitre précédent.

Expression du potentiel φ. — La fonction φ est donnée par l'équation (3) (Chap. VIII, n° 10).

Pour avoir une solution particulière de cette équation, nous posons, comme en cet endroit,

$$\varphi = e^{\alpha t}\varphi_1, \qquad m = \frac{4\pi k \times \alpha^2}{\alpha + 4\pi \times c^2},$$

et nous avons

$$\Delta\varphi_1 - m\varphi_1 = 0.$$

Désignons par R la distance à l'axe des z, et regardons φ_1 comme ne dépendant que de R et z; alors, en posant

$$\varphi_1 = (\mathrm{H}\sin pz + \mathrm{H}'\cos pz)\psi,$$

nous aurons l'équation

$$\frac{d^2\psi}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\psi}{dR} - (m + p^2)\psi = 0.$$

La fonction qui satisfait à cette équation, sans être infinie pour $R = 0$, est une fonction de Bessel, et, en posant

$$m + p^2 = g^2,$$

on a

$$\psi = 1 + \frac{g^2R^2}{4} + \frac{g^4R^4}{4^2.2^2} + \frac{g^6R^6}{4^3(2.3)^2} + \ldots = J(gR)$$

ou

$$\psi = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos h(gR\cos\omega)\,d\omega.$$

En dehors du fil, on a

$$\Delta\varphi' = 0,$$

et la solution qui correspond à l'expression précédente de ψ est

$$\varphi' = \varphi'_1 e^{\alpha t} = \psi' e^{\alpha t}(H\sin pz + H'\cos pz),$$

ψ' étant une solution de l'équation

$$(b) \qquad \frac{d^2\psi'}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\psi'}{dR} - p^2\psi' = 0.$$

La fonction ψ' ne se rapporte qu'à des valeurs de R plus grandes que le rayon a du fil; elle n'est donc pas assujettie à être finie pour $R = 0$; mais nous la choisirons de manière qu'elle s'annule pour $R = \infty$. Désignons par $GQ(pR)$ cette fonction, et nous aurons

$$\varphi' = GQ(pR)e^{\alpha t}(H\sin pz + H'\cos pz).$$

Nous déterminerons la constante G d'après la condition

$$\varphi' = \varphi \quad \text{pour } R = a,$$

et nous aurons ainsi

$$G = \frac{J(ga)}{Q(pa)}.$$

4. *Expression de* Q(R). — La fonction Q(R) satisfait à l'équation

$$(c) \qquad \frac{d^2Q}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{dQ}{dR} - Q = 0,$$

qui a pour solution particulière J(R) et dont la solution la plus générale est, par suite,

$$C'J + CJ\int_R^\infty \frac{1}{RJ^2}\,dR,$$

en désignant par C et C′ deux constantes arbitraires. Pour que cette fonction ne soit pas infinie pour $R = \infty$, il faut faire $C' = 0$. Faisons donc

$$Q(R) = J\int_R^\infty \frac{1}{RJ^2}\,dR,$$

et, en remplaçant la fonction J par sa valeur,

$$1 + \frac{R^2}{4} + \frac{R^4}{4^2.2^2} + \ldots,$$

on en conclura

$$(d) \qquad \int_R^\infty \frac{dR}{RJ^2} = -\log R + \frac{R^2}{4} - \frac{5}{32}\frac{R^4}{4} + \frac{23}{4^3.3^2}\frac{R^6}{6} + \ldots.$$

On ne doit pas ajouter une constante au second membre, car la fonction J peut aussi se mettre sous la forme

$$J = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(R\cos\omega)\,d\omega;$$

donc, quand R est très grand, J est de l'ordre de e^{lR}, en désignant par l une constante positive; par suite, $\frac{1}{RJ^2}$ est de l'ordre de $\frac{e^{-2lR}}{R}$. Il n'y a donc pas lieu d'ajouter au second membre de (d) une constante correspondant à la limite supérieure de l'intégrale.

En multipliant l'intégrale (d) par J, nous obtenons

$$Q(R) = -J(R)\log R + \frac{R^2}{4} + \frac{3}{2.2^2}\frac{R^4}{4^2} + \frac{11}{2^3.3^3}\frac{R^6}{4^3} + \ldots.$$

On ne reconnaît pas ainsi facilement la loi des coefficients de cette série; mais on pourra l'obtenir de la manière suivante. L'expression

$$(e) \qquad -\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cosh(R\cos\omega)\log(R\sin^2\omega)\,d\omega$$

est solution de l'équation (c), et l'on peut la transformer dans une série de même forme que la précédente et dont on déterminera les coefficients en s'appuyant sur les formules

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \log\sin\omega\,d\omega = -\frac{\pi}{2}\log 2, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2n\omega \log\sin\omega\,d\omega = -\frac{\pi}{4n},$$

où n est un nombre entier. Or l'intégrale (e) ne peut différer de $Q(R)$ que par $J(R)$ multiplié par une constante, et l'on déduit de cette comparaison

$$Q(R) = -J(R)\log R + \frac{R^2}{4} + \frac{1+\frac{1}{2}}{2^2}\frac{R^4}{4^2} + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(2.3)^2}\frac{R^6}{4^3} + \ldots.$$

5. *Détermination du potentiel* θ. -- On a l'équation

$$\Delta\theta = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d^2\theta}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\theta}{dR} + \frac{d^2\theta}{dz^2} = 0.$$

Posons, pour abréger,

$$T = e^{\alpha t}(H\sin pz + H'\cos pz)$$

et faisons

$$\theta = \theta_1 T,$$

θ_1 satisfera à l'équation (b); nous aurons donc

$$\theta_1 = C\,J(pR).$$

La fonction θ prise à l'extérieur, ou θ', satisfait à la même équation qu'à l'intérieur, et l'on a

$$\theta' = \theta'_1 T, \qquad \theta'_1 = K\,Q(pR).$$

Enfin, on obtient une relation entre les deux constantes C et K, d'après

la condition

$$\frac{d\theta}{d\mathrm{R}} = \frac{d\theta'}{d\mathrm{R}} \qquad \text{pour } \mathrm{R} = a;$$

ce qui donne

$$\mathrm{K} = \frac{\mathrm{J}'(pa)}{\mathrm{Q}'(pa)}\,\mathrm{C},$$

les accents des lettres J et Q indiquant des dérivées.

6. *Détermination de* $\mathcal{S}$. — Après avoir posé (Chap. VIII, n° 11)

$$\mathrm{N} = \frac{\alpha + 4\pi\varkappa c^2}{c^2 s}, \qquad s = 4\pi\varkappa\alpha,$$

nous avons considéré la fonction

$$\tau_1 = -\mathrm{N}\varphi_1 - \frac{1}{\alpha}\theta_1,$$

et nous avons obtenu pour $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ le système de valeurs

$$\mathcal{F} = \left(\lambda + \frac{d\tau_1}{dx}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{G} = \left(\lambda_1 + \frac{d\tau_1}{dy}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{H} = \left(\lambda_2 + \frac{d\tau_1}{dz}\right)e^{\alpha t},$$

λ, λ_1, λ_2 étant des solutions de l'équation

$$\Delta\lambda - s\lambda = 0.$$

Occupons-nous d'abord de $\mathcal{H}$. Posons

$$\lambda_2 = \varpi p(\mathrm{H}\cos pz - \mathrm{H}'\sin pz),$$

et nous aurons

$$\frac{d^2\varpi}{d\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\varpi}{d\mathrm{R}} - (p^2 + s)\varpi = 0;$$

donc, en désignant par L_2 une constante et posant

$$p^2 + s = q^2,$$

nous aurons

$$\varpi = \mathrm{L}_2\,\mathrm{J}(q\mathrm{R})$$

et

$$\lambda_2 = \mathrm{L}_2\,\mathrm{J}(q\mathrm{R})\,p(\mathrm{H}\cos pz - \mathrm{H}'\sin pz).$$

D'autre part, nous avons

$$\frac{d\tau_1}{dz} = -\left[\mathrm{N}\,\mathrm{J}(g\mathrm{R}) + \frac{1}{\alpha}\mathrm{C}\,\mathrm{J}(p\mathrm{R})\right] p(\mathrm{H}\cos pz - \mathrm{H}'\sin pz),$$

et nous obtenons enfin

$$\mathcal{G} = \left[-\mathrm{N}\,\mathrm{J}(g\mathrm{R}) - \frac{1}{\alpha}\mathrm{C}\,\mathrm{J}(p\mathrm{R}) + \mathrm{L}_2\,\mathrm{J}(q\mathrm{R})\right]\frac{d\mathrm{T}}{dz}.$$

Occupons-nous ensuite de $\mathcal{G}'$. Désignons, comme en l'endroit cité, par τ' une solution particulière de l'équation

$$\Delta\tau' - \frac{h\alpha}{c^2}\varphi'_1 = 0$$

et par λ', λ'_1, λ'_2 trois solutions de $\Delta\lambda' = 0$; nous aurons

$$\mathcal{F}' = \left(\lambda' + \frac{d\tau'}{dx}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{G}' = \left(\lambda'_1 + \frac{d\tau'}{dy}\right)e^{\alpha t}, \qquad \mathcal{H}' = \left(\lambda'_2 + \frac{d\tau'}{dz}\right)e^{\alpha t}.$$

Posons

$$\tau' = \sigma(\mathrm{H}\sin pz + \mathrm{H}'\cos pz),$$

et nous aurons

$$(f) \qquad \frac{d^2\sigma}{d\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\sigma}{d\mathrm{R}} - p^2\sigma = \frac{h\alpha}{c^2}\frac{\mathrm{J}(ga)}{\mathrm{Q}(pa)}\mathrm{Q}(p\mathrm{R}).$$

Pour intégrer cette équation, considérons d'abord celle-ci

$$\frac{d^2\sigma}{d\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\sigma}{d\mathrm{R}} - p^2\sigma = \mathrm{B}\,\mathrm{Q}(p'\mathrm{R}),$$

qui diffère de la précédente en ce que $\mathrm{Q}(p\mathrm{R})$ est remplacé par $\mathrm{Q}(p'\mathrm{R})$; posons

$$\sigma = \mathrm{D}\,\mathrm{Q}(p'\mathrm{R})$$

et substituons dans l'équation précédente, nous obtiendrons cette solution particulière

$$\sigma = \frac{\mathrm{B}}{p'^2 - p^2}\mathrm{Q}(p'\mathrm{R}),$$

de laquelle nous déduisons cette autre

$$\sigma = B\frac{Q(p'R) - Q(pR)}{p'^2 - p^2}.$$

Alors, pour avoir une solution de l'équation (f), faisons tendre p' vers p et remplaçons B par sa valeur; nous aurons

$$\sigma = \frac{h\alpha}{c^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}\frac{R\,Q'(pR)}{2p}.$$

Prenons ensuite

$$\lambda'_2 = C'\,Q(pR)p\,(H\cos pz - H'\sin pz),$$

et nous aurons en définitive

$$\mathcal{S}' = \left[C'\,Q(pR) + \frac{h\alpha}{2pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}R\,Q'(pR)\right]\frac{dT}{dz}.$$

Il nous reste à exprimer les deux conditions

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}', \qquad \frac{d\mathcal{S}}{dR} = \frac{d\mathcal{S}'}{dR} \qquad \text{pour } R = a;$$

ce qui nous donne ces deux relations entre les coefficients

$$\text{(A)}\quad \begin{cases} -N\,J(ga) - \frac{1}{\alpha}C\,J(pa) + L_2\,J(qa) \\ \quad = C'\,Q(pa) + \frac{h\alpha}{2pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}a\,Q'(pa), \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad \begin{cases} -Ng\,J'(ga) - \frac{1}{\alpha}Cp\,J'(pa) + L_2 q\,J'(qa) \\ \quad = C'p\,Q'(pa) + \frac{h\alpha}{2pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}[ap\,Q''(pa) + Q'(pa)]. \end{cases}$$

7. *Calcul de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$.* — Posons

$$P = \mathcal{F}\frac{x}{R} + \mathcal{G}\frac{y}{R}, \qquad P_1 = \mathcal{F}\frac{y}{R} - \mathcal{G}\frac{x}{R},$$

et, au lieu de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$, considérons les deux quantités P et P_1 dont la dernière sera trouvée nulle.

D'après les expressions de $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ données ci-dessus, on a

$$P_1 = \left(\frac{\lambda x + \lambda_1 y}{R} + \frac{d\tau_1}{dR}\right) e^{\alpha t},$$

et cette expression ne doit dépendre de x et y que par R. Ensuite λ et λ_1 satisfont à l'équation

$$\Delta\lambda - s\lambda = 0,$$

dont on obtient une solution en prenant l'expression

$$LJ(qR)(H\sin pz + H'\cos pz),$$

où L est constant. Les dérivées de cette expression par rapport à x et y satisfont à la même équation, et nous prendrons

$$\lambda = Lq J'(qR)\frac{x}{R}(H\sin pz + H'\cos pz),$$

$$\lambda_1 = Lq J'(qR)\frac{y}{R}(H\sin pz + H'\cos pz);$$

nous obtenons ainsi, pour P,

$$P = \left[Lq J'(qR) + \frac{d\tau_1}{dR}\right] T$$

ou

$$P = \left[-Ng J'(gR) - \frac{1}{\alpha} Cp J'(pR) + Lq J'(qR)\right] T.$$

On a, de plus,

$$P_1 = \left(\lambda + \frac{d\tau_1}{dx}\right)\frac{y}{R} - \left(\lambda + \frac{d\tau_1}{dy}\right)\frac{x}{R} = 0.$$

Pour les points extérieurs au fil, posons de même

$$P' = \mathcal{F}'\frac{x}{R} + \mathcal{G}'\frac{y}{R}, \qquad P'_1 = \mathcal{F}'\frac{y}{R} - \mathcal{G}'\frac{x}{R} = 0.$$

D'après les expressions de $\mathcal{F}'$ et $\mathcal{G}'$ (n° 6), si nous posons

$$\lambda' = \frac{d\mu}{dx}, \qquad \lambda'_1 = \frac{d\mu}{dy},$$

nous aurons

$$P' = e^{\alpha t}\left(\frac{d\mu}{dR} + \frac{d\tau'}{dR}\right).$$

La fonction μ satisfait à l'équation $\Delta\mu = 0$, et, en désignant par M une constante, on a

$$\mu = MQ(pR)(H\sin pz + H'\cos pz);$$

la fonction τ' a été déterminée ci-dessus, et l'on en conclut

$$P' = \left\{\left[Mp + \frac{h\alpha}{2pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}\right]Q'(pR) + \frac{h\alpha}{2c^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}RQ''(pR)\right\}T.$$

Exprimons maintenant les conditions aux limites

$$P = P', \qquad \frac{dP}{dR} = \frac{dP'}{dR} \qquad \text{pour} \qquad R = a,$$

et nous aurons ces deux relations entre les coefficients

$$(C)\quad \begin{cases} -Ngg\,J'(ga) - \frac{1}{\alpha}Cp\,J'(pa) + Lq\,J'(qa) \\ \quad = \left[Mp + \frac{h\alpha}{2pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}\right]Q'(pa) + \frac{h\alpha}{2c^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}aQ''(pa) \end{cases}$$

$$(D)\quad \begin{cases} -Ng^2\,J''(ga) - \frac{1}{\alpha}Cp^2\,J''(pa) + Lq^2\,J''(qa) \\ \quad = \left[Mp + \frac{h\alpha}{2pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}\right]pQ''(pa) + \frac{h\alpha}{2c^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}[Q''(pa) + apQ'''(pa)]. \end{cases}$$

8. *Équation entre* λ, λ_1, λ_2. — Nous avons à l'intérieur du fil l'équation

$$(g)\qquad \frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda_1}{dy} + \frac{d\lambda_2}{dz} = 0.$$

Or, d'après les valeurs trouvées pour λ et λ_1, on a

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda_1}{dy} = L\left[q^2\,J''(qR) + \frac{q}{R}J'(qR)\right]Te^{-\alpha t},$$

et, la fonction $J(qR)$ satisfaisant à l'équation

$$q^2 J''(qR) + \frac{q}{R} J'(qR) - q^2 J(qR) = 0,$$

il en résulte

$$\frac{d\lambda}{dx} + \frac{d\lambda_1}{dy} = L q^2 J(qR) T e^{-\alpha t}.$$

On a ensuite

$$\lambda_2 = L_2 J(qR) p (H \cos pz - H' \sin pz).$$

$$\frac{d\lambda_2}{dz} = - L_2 p^2 J(qR) T e^{-\alpha t};$$

donc l'équation (g) devient

$$(E) \qquad L_2 = \frac{L q^2}{p^2}.$$

D'autre part, nous avons à l'extérieur du fil l'équation

$$(h) \qquad \frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\lambda'_1}{dy} + \frac{d\lambda'_2}{dz} = - \frac{\alpha}{c^2} \varphi'_1.$$

Or on a

$$\frac{d\lambda'}{dx} + \frac{d\lambda'_1}{dy} = \frac{d^2\mu}{dx^2} + \frac{d^2\mu}{dy^2} = \frac{d^2\mu}{dR^2} + \frac{1}{R}\frac{d\mu}{dR}$$

$$= M[p^2 Q''(pR) + \frac{p}{R} Q'(pR)] T e^{-\alpha t}$$

$$= M p^2 Q(pR) T e^{-\alpha t},$$

puisque $Q(pR)$ satisfait à l'équation

$$p^2 Q''(pR) + \frac{p}{R} Q'(pR) - p^2 Q(pR) = 0.$$

On a aussi

$$\frac{d\lambda'_2}{dz} = - C' p^2 Q(pR) T e^{-\alpha t},$$

$$\varphi'_1 = \frac{J(ga)}{Q(pa)} Q(pR) T e^{-\alpha t}.$$

L'équation (h) devient donc

$$(F) \qquad M - C' = - \frac{\alpha}{p^2 c^2} \frac{J(ga)}{Q(pa)}.$$

9. *Force magnétique.* — Les composantes de la force magnétique sont données par les formules

$$X = \frac{d\mathfrak{H}}{dy} - \frac{d\mathfrak{G}}{dz}, \qquad Y = \frac{d\mathfrak{F}}{dz} - \frac{d\mathfrak{H}}{dx}, \qquad Z = \frac{d\mathfrak{G}}{dx} - \frac{d\mathfrak{F}}{dy}.$$

Comme nous avons

$$\mathfrak{F} = P\frac{x}{R}, \qquad \mathfrak{G} = P\frac{y}{R},$$

il en résulte $Z = 0$.

On trouve ensuite

$$X = (L_2 - L)\,qJ'(qR)\frac{y}{R}\frac{dT}{dz},$$

et, d'après la valeur de L_2, on a, à l'intérieur du fil,

$$X = Lq\frac{4\pi\varkappa\alpha}{p^2}J'(qR)\frac{y}{R}\frac{dT}{dz},$$

puis

$$Y = -Lq\frac{4\pi\varkappa\alpha}{p^2}J'(qR)\frac{x}{R}\frac{dT}{dz}.$$

De même, à l'extérieur du fil, Z est nul et l'on trouve

$$X = \frac{\alpha}{pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}Q'(pR)\frac{y}{R}\frac{dT}{dz},$$
$$Y = -\frac{\alpha}{pc^2}\frac{J(ga)}{Q(pa)}Q'(pR)\frac{x}{R}\frac{dT}{dz}.$$

Ainsi, la force magnétique est perpendiculaire à l'axe du fil et à son rayon.

10. *Calcul des coefficients.* — Les quatre premières des équations (A), (B), (C), (D), (E), (F), qui ont lieu entre les coefficients C, C', L, L_2, M, sont assez compliquées. Essayons maintenant de supposer que les quantités *pa*, *ga*, *qa* soient très petites, ce qui simplifiera beaucoup ces équations. En effet, en général, si *b* est très petit, on

peut faire

$$J(b)=1, \qquad J'(b)=\frac{b}{2}, \qquad J''(b)=\frac{1}{2},$$

$$Q(b)=\log b, \qquad Q'(b)=\frac{1}{b}, \qquad Q''(b)=-\frac{1}{b^2}.$$

D'après cela, les deux équations (C), (D) donnent les deux suivantes :

$$M=0, \tag{1}$$

$$C=\frac{Lq^2-Ng^2}{p^2}\alpha. \tag{i}$$

Les deux équations (A) et (B) deviennent

$$-N-\frac{1}{\alpha}C+L_2=C'\log pa+\frac{h\alpha}{2p^2c^2}\frac{1}{\log pa}, \tag{k}$$

$$-N\frac{g^2a}{2}-\frac{1}{\alpha}C\frac{p^2a}{2}+L_2\frac{q^2a}{2}=\frac{C'}{a}. \tag{l}$$

Dans l'équation (k) remplaçons C par sa valeur (i), et L_2 par sa valeur (E), nous obtiendrons

$$C'\log pa=N\frac{g^2-p^2}{p^2}-\frac{h\alpha}{2p^2c^2}\frac{1}{\log pa}.$$

Or on a

$$N(g^2-p^2)=Nm=\frac{k\alpha}{c^2};$$

donc

$$C'=\frac{k\alpha}{p^2c^2\log pa}-\frac{h\alpha}{2p^2c^2(\log pa)^2}.$$

D'autre part, d'après l'expression (F), où M est nul, on a

$$C'=\frac{\alpha}{p^2c^2\log pa}. \tag{2}$$

Ces deux expressions de C′ coïncident si $k=1$, ce qui entraîne $h=0$. Ainsi la supposition que ga et qa soient très petits n'est possible que si k est égal à 1; ce qui, d'une manière générale, est l'hypo-

thèse la plus simple; car alors la fonction Ψ considérée au n° 1 du Chapitre VIII disparaît.

En remplaçant aussi C et L_2 dans l'équation (l), on obtient

$$L = \frac{2p^2}{q^2a^2s}C'$$

ou

$$L = \frac{1}{2\pi\varkappa q^2a^2c^2\log pa}. \tag{3}$$

Enfin, nous aurons

$$L_2 = \frac{1}{2\pi\varkappa p^2a^2c^2\log pa}, \tag{4}$$

$$C = \frac{\alpha}{2\pi\varkappa p^2a^2c^2\log pa} - \frac{Ng^2}{p^2}\alpha. \tag{5}$$

Les formules (1), (2), (3), (4), (5) déterminent les coefficients; mais elles renferment une quantité inconnue α, qu'il reste encore à trouver.

Les quantités ga et qa ont été supposées très petites; il faudra donc examiner si ces quantités le sont effectivement dans les cas où nous appliquerons les formules précédentes.

11. *Composantes du courant.* — On a, pour la composante w du courant suivant l'axe des z,

$$w = -\varkappa\left(\frac{d\varphi}{dz} + \frac{d\theta}{dz} + \frac{d\xi}{dt}\right).$$

En remplaçant φ, θ, ξ par leurs valeurs, on obtient

$$w = -\varkappa[(1-\alpha N)J(gR) + L_2\alpha J(qR)]\frac{dT}{dz},$$
$$= \left[\frac{\alpha}{4\pi c^2}J(gR) - L_2\alpha\varkappa J(qR)\right]\frac{dT}{dz}$$

ou, en supposant gR et qR très petits,

$$w = \frac{\alpha}{4\pi c^2}\left(1 - \frac{2}{a^2p^2\log pa}\right)\frac{dT}{dz}.$$

On a ensuite, pour la composante υ du courant suivant le rayon

$$\upsilon = -\varkappa\left(\frac{d\varphi}{d\mathrm{R}} + \frac{d\vartheta}{d\mathrm{R}} + \frac{d\Pi}{dt}\right) = \left[\frac{\alpha}{4\pi c^2} g\,\mathrm{J}'(g\mathrm{R}) - \mathrm{L}q\varkappa\alpha\,\mathrm{J}'(q\mathrm{R})\right]\mathrm{T}$$

ou, en supposant $g\mathrm{R}$ et $q\mathrm{R}$ très petits,

$$\upsilon = \frac{\alpha\mathrm{R}}{4\pi c^2}\left(\frac{g^2}{2} - \frac{1}{a^2\log pa}\right)\mathrm{T}.$$

Fil télégraphique sous-marin.

12. Dans les calculs précédents sur le mouvement de l'électricité dans un fil télégraphique, nous avons vu (n° 10) qu'il reste encore à déterminer une quantité α qui entre dans une exponentielle relative au temps. Or cette détermination se fait d'une manière plus facile pour les fils sous-marins que pour les fils aériens, et, pour cette raison, nous commencerons par nous occuper des premiers.

Dans les lignes sous-marines, le fil conducteur est toujours en cuivre; il ne subit donc pas de magnétisation sensible. Il est recouvert d'une enveloppe isolante de gutta-percha ou de caoutchouc, et l'épaisseur de cette enveloppe doit être assez grande pour qu'il ne se produise pas de perte d'électricité sur la ligne télégraphique.

Nous devrons faire subir une légère modification aux équations des numéros précédents, parce que la substance isolatrice renfermera de l'électricité de polarisation. Désignons par ω le potentiel de cette électricité à l'intérieur du fil : nous aurons

$$\Delta\omega = 0 \tag{1}$$

et, en faisant $h = 1$, $k = 0$, selon ce que nous avons vu (n° 10), les équations (1) du n° 1 seront remplacées par

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta\mathfrak{F} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\vartheta}{dx} + \dfrac{d\omega}{dx} + \dfrac{d\mathfrak{F}}{dt}\right), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots, \end{array}\right. \tag{2}$$

et nous aurons encore l'équation

$$\frac{d\mathfrak{F}}{dx} + \frac{d\mathfrak{G}}{dy} + \frac{d\mathfrak{H}}{dz} = -\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{dt}. \tag{3}$$

Les expressions de φ, φ', θ, θ' resteront les mêmes que précédemment. La fonction ω sera de la forme

$$\omega = \mathrm{E}\,\mathrm{J}(p\mathrm{R})\mathrm{T},$$

et, en posant $\omega = \omega_1 e^{\alpha t}$, nous trouvons que l'expression désignée par τ_1 devient

$$\tau_1 = -\mathrm{N}\varphi_1 - \frac{4\pi x}{s}(\theta_1 + \omega_1).$$

Il en résulte que le seul changement à faire aux expressions de $\mathcal{S}$ et P doit consister à remplacer C par C + E, et que les valeurs de $\mathcal{S}'$ et P′ restent

$$\mathcal{S}' = \mathrm{C}'\log p\mathrm{R}\frac{d\mathrm{T}}{dz}, \qquad \mathrm{P}' = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\mathrm{T}.$$

Donc enfin, dans les équations (A), (B), (C), (D) des nos 6 et 7, il n'y aura à changer que C en C + E.

13. Le raisonnement qui a servi à établir l'équation

$$\mathrm{L}_2 = \mathrm{L}\frac{q^2}{p^2}$$

ne subit aucun changement. On en conclut les cinq équations suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathrm{L} = \dfrac{1}{2\pi x q^2 a^2 c^2 \log pa}, \qquad \mathrm{L}_2 = \mathrm{L}\dfrac{q^2}{p^2}, \qquad \mathrm{M} = 0, \\ \mathrm{C} + \mathrm{E} = \dfrac{\mathrm{L}q^2 - \mathrm{N}g^2}{p^2}\alpha, \qquad \mathrm{C}' = \dfrac{\alpha}{p^2 c^2 \log pa}. \end{cases}$$

On peut encore obtenir la première de ces formules en se servant d'une remarque faite (Chap. VIII, n° 13) et, en égalant entre elles deux expressions de ρ, la densité de la couche électrique qui se trouve à la surface du fil. D'après la formule de l'électrostatique, on a

$$(5)\qquad \rho = \frac{-1}{4\pi ac^2}\left(\frac{1}{\log pa} - \frac{g^2 a^2}{2}\right)\mathrm{T}.$$

D'autre part, $\frac{d\rho}{dt}$ est égal à la valeur de υ, composante normale du

courant prise à la surface, et l'on obtient ainsi

$$\frac{d\rho}{dt} = \left(\frac{g^2 a\alpha}{8\pi c^2} - \frac{\alpha\varkappa}{2} \mathrm{L} q^2 a\right) \mathrm{T}$$

ou

$$\rho = \left(\frac{g^2 a}{8\pi c^2} - \frac{\varkappa}{2} \mathrm{L} q^2 a\right) \mathrm{T};$$

en égalant ces deux valeurs de ρ, on obtient l'expression de L.

On obtient encore, pour les composantes du courant,

$$w = \frac{\alpha}{4\pi c^2}\left(1 - \frac{2}{a^2 p^2 \log pa}\right)\frac{d\mathrm{T}}{dz},$$

$$v = \frac{\alpha \mathrm{R}}{4\pi c^2}\left(\frac{g^2}{2} - \frac{1}{a^2 \log pa}\right)\mathrm{T}.$$

14. Désignons par η le coefficient d'induction du diélectrique (*Théorie du potentiel*, t. II, Chap. III, n° 10). Si l'on désigne par V le potentiel total à l'intérieur du diélectrique, par V_1 sa valeur pour $\mathrm{R} = a$ correspondant à sa surface intérieure, et par V_2 sa valeur pour $\mathrm{R} = b$ correspondant à sa surface extérieure, nous obtiendrons, d'après le calcul du n° 16 du Chapitre cité, pour les densités ρ et ρ_1 sur les surfaces intérieure et extérieure,

$$\rho = \eta \frac{\mathrm{V}_1 - \mathrm{V}_2}{4\pi a \log \frac{b}{a}}, \qquad \rho_1 = \eta \frac{\mathrm{V}_2 - \mathrm{V}_1}{4\pi b \log \frac{b}{a}}.$$

Dans le problème actuel, le potentiel total est représenté par $\varphi + \theta + \omega$ et il doit être nul pour $\mathrm{R} = b$. On a donc, pour la densité à la surface $\mathrm{R} = a$,

$$\rho = \eta \frac{\varphi + \theta + \omega}{4\pi a \log \frac{b}{a}},$$

et, en remplaçant φ, θ, ω par leurs valeurs, on obtient

$$\rho = \eta \frac{1 + (\mathrm{C} + \mathrm{E})}{4\pi a \log \frac{b}{a}} \mathrm{T}.$$

D'ailleurs, nous avons pour ρ l'expression (5) ou, très approximativement,

$$\rho = \frac{-1}{4\pi a c^2 \log pa} T.$$

En égalant ces deux valeurs de ρ, nous obtenons

$$C + E = -\frac{1}{\eta c^2} \frac{\log \frac{b}{a}}{\log pa} - 1.$$

Désignons par K la capacité du fil par unité de longueur, c'est-à-dire la quantité d'électricité que posséderait cette unité de longueur pour un potentiel égal à l'unité; K est égal à $2\pi a$ multiplié par la densité relative au potentiel 1. Donc, d'après ce qui précède, on a

$$(\alpha) \qquad K = \frac{\eta}{2 \log \frac{b}{a}},$$

et la valeur de C + E peut s'écrire

$$C + E = -\frac{1}{2 K c^2 \log pa} - 1.$$

15. Nous avons une autre expression de C + E renfermée dans les formules (4),

$$C + E = \frac{L q^2 - N g^2}{p^2} \alpha = \frac{\alpha}{2\pi \varkappa p^2 a^2 c^2 \log pa} - \frac{\alpha^2}{c^2 p^2} - \frac{\alpha}{4\pi \varkappa c^2} - 1.$$

En égalant ces deux expressions de C + E, nous obtenons l'équation

$$\alpha^2 - \left(\frac{1}{2\pi \varkappa a^2 \log pa} - \frac{p^2}{4\pi \varkappa} \right) \alpha - \frac{p^2}{2 K \log pa} = 0$$

ou, en supprimant un terme négligeable,

$$\alpha^2 - \frac{1}{2\pi \varkappa a^2 \log pa} \alpha - \frac{p^2}{2 K \log pa} = 0.$$

On en tire

$$\alpha = \frac{1}{4\pi \varkappa a^2 \log pa} \pm \sqrt{\frac{1}{16 \pi^2 \varkappa^2 a^4 (\log pa)^2} + \frac{p^2}{2 K \log pa}}.$$

Comme $\log pa$ est négatif, si ces deux racines sont réelles, elles sont négatives et la plus petite a pour grandeur

$$(\beta) \qquad -\frac{1}{K}\,\frac{2\pi\varkappa a^2 p^2}{1+\sqrt{1+\frac{8p^2\pi^2\varkappa^2 a^4\log pa}{K}}}.$$

Si, de plus, le second terme de la quantité située sous le radical peut être considéré comme très petit par rapport à l'unité, cette racine se réduira à très peu près à

$$(\gamma) \qquad -\frac{\pi a^2\varkappa p^2}{K}.$$

L'autre racine qu'on déduit de la formule (β) par le changement du signe du radical sera excessivement grande par rapport à la première; elle correspondra à un mouvement qui s'éteindra incomparablement plus vite que celui qui est donné par la première racine, et ce mouvement peut être négligé.

16. Il s'agit maintenant d'examiner si dans les applications les racines α seront effectivement réelles et si la quantité

$$-\frac{8p^2\pi^2\varkappa^2 a^4\log pa}{K}$$

pourra être considérée comme très petite par rapport à l'unité. On voit immédiatement que, le cuivre pur étant le métal le meilleur conducteur de l'électricité parmi les métaux usuels, c'est celui pour lequel cette condition sera le moins facile à remplir. On y satisferait, par exemple, beaucoup mieux pour un fil de laiton, dans lequel la conductibilité spécifique $\varkappa$ est environ cinq fois plus petite que dans le cuivre pur.

Comme exemple, prenons, pour un fil de cuivre recouvert de gutta-percha, les données suivantes :

$$\text{Rayon } a = 1^{mm}, \qquad \text{Longueur } l = 1000 \text{ kilom.},$$

$$\frac{b}{a} = 2{,}92.$$

Dans le système d'unités électromagnétiques C.G.S. (Chap. VII, n° 10), on aura

$$a = 0,1, \qquad l = 1000 \times 10^5 = 10^8, \qquad x = \frac{1}{1652}.$$

Suivant Fl. Jenkin, le coefficient d'induction η de la gutta-percha est égal à $4,2$; donc on a

$$\eta = \frac{4,2}{c^2}$$

dans le système d'unités adopté, et d'après la formule (α)

$$K = \frac{2,1}{c^2 \log 2,92} = \frac{1,96}{c^2}.$$

On verra ci-dessous que le nombre p, qui s'obtient d'après des conditions relatives aux extrémités du fil, est de la forme $\frac{n\pi}{l}$, n étant un quelconque des nombres 1, 2, 3, ...

Examinons ensuite la quantité

$$N = \frac{8p^2\pi^2x^2a^4 \log pa}{K} = n^2 \times \frac{8\pi^4x^2}{K}\frac{a^4}{l^2} \times \log pa.$$

Faisant $c = 31.10^9$, on obtient ce nombre

$$P = \frac{8\pi^4x^2}{K}\frac{a^4}{l^2} = 0,001404.$$

La quantité $\log pa$ prend les valeurs suivantes :

$$\log\frac{\pi a}{l} = \frac{-9 + 0,49715}{0,43429} = -19,58,$$

$$\log\frac{2\pi a}{l} = -18,89, \qquad \log\frac{3\pi a}{l} = -18,48, \qquad \log\frac{4\pi a}{l} = -18,19,$$

$$\log\frac{5\pi a}{l} = -17,97, \qquad \log\frac{6\pi a}{l} = -17,79, \qquad \log\frac{7\pi a}{l} = -17,63,$$

et le nombre N pour les valeurs de n égales à 1, 2, 3, ... a pour valeur

$$N_1 = -0,0274, \quad N_2 = -0,1058, \quad N_3 = -0,2329, \quad N_4 = -0,4025,$$
$$N_5 = -0,6289, \quad N_6 = -0,8966, \quad N_7 = -1,2095.$$

Ainsi les racines α sont réelles depuis $n = 1$ jusqu'à $n = 6$, et elles sont imaginaires à partir de $n = 7$. On trouve ensuite pour le dénominateur du second facteur de (β) les valeurs suivantes, correspondant à $n = 1, 2, \ldots, 6$:

$$1,9862, \quad 1,9456, \quad 1,8758, \quad 1,7730, \quad 1,6092, \quad 1,3215,$$

tandis que l'on passe de (β) à (γ) en faisant ce dénominateur égal à 2. L'approximation n'est assez grande que pour ses trois premières valeurs.

Toutefois remarquons que, lorsqu'on lance un courant dans un fil sous-marin, l'intensité du courant dans le fil est donnée par la somme de plusieurs termes contenant l'exponentielle $e^{\alpha t}$, où α a les valeurs qui correspondent à $n = 1, 2, 3, \ldots$, et, comme ces exponentielles décroissent d'une manière extrêmement rapide, il en résulte que, après un temps très petit par rapport à la durée sensible de l'état variable, on pourra réduire à 2 le dénominateur des racines α, sans changer sensiblement la valeur de l'intensité du courant.

Si le fil était en laiton, en conservant les mêmes dimensions, le nombre N devrait être divisé par 25 environ et l'emploi de la formule (γ), pour représenter les racines α, pourrait être tout à fait admis.

On obtient, pour les valeurs de α qui correspondent aux valeurs $n = 1, 2, \ldots, 6$,

$$\alpha_1 = -\ 9,267, \quad \alpha_2 = -\ 37,831, \quad \alpha_3 = -88,295, \quad \alpha_4 = -166,13,$$
$$\alpha_5 = -285,97, \quad \alpha_6 = -501,58.$$

17. Occupons-nous ensuite du mouvement de l'électricité à l'intérieur du fil télégraphique dans les conditions où il a coutume de se produire. Supposons donc que l'extrémité du fil $(z = 0)$ soit mise brusquement au potentiel A et maintenue à ce potentiel constant par sa communication avec une pile. L'autre extrémité du fil $(z = l)$ est en communication avec la Terre et se trouve au potentiel zéro. Alors le fil sera traversé par des courants variables qui tendront rapidement vers l'état permanent. Examinons cet état variable.

Désignons par α_n la racine α correspondant au nombre entier n. La

fonction continue de t

$$\frac{l-z}{l} - \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}e^{\alpha_n t}\sin\frac{n\pi z}{l}$$

s'annule pour $t=0$, quel que soit z; donc la dérivée par rapport à z de cette fonction s'annule aussi pour $t=0$ ou encore la limite de la série

$$1+2\sum e^{\alpha_n t}\cos\frac{n\pi z}{l},$$

quand t tend vers zéro, est nulle. De plus, la dérivée par rapport à z de cette dernière expression s'annule pour $z=0$ et $z=l$.

Or les termes de w renferment en facteur

$$\frac{d\mathrm{T}}{dz} = p(\mathrm{H}_n\cos pz - \mathrm{H}'_n\sin pz)e^{\alpha_n t},$$

et w doit satisfaire aux conditions suivantes : il s'annule pour $t=0$, quel que soit z; il se réduit à $\frac{\mathrm{A}x}{l}$ pour $t=\infty$; enfin on a

$$\frac{dw}{dz}=0 \qquad \text{pour} \qquad z=0 \qquad \text{et} \qquad z=l.$$

Il en résulte que w peut être mis sous cette forme

$$(a) \qquad w = \frac{x\mathrm{A}}{l} + \frac{2x\mathrm{A}}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi z}{l}e^{\alpha_n t},$$

et l'intensité du courant pour toute la section du fil sera $\pi a^2 w$. On voit aussi très facilement que si, après que le courant est devenu permanent, on supprime le contact avec la pile, la composante w du courant sera donnée par la formule

$$w = -\frac{2\mathrm{A}x}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\frac{n\pi z}{l}e^{\alpha_n t}.$$

Nous avons, pour le terme simple de w (n° 13),

$$w = \frac{\alpha_n}{4\pi c^2}\left(1-\frac{2}{a^2p^2\log pa}\right)p\,\mathrm{H}_n\cos pz\,e^{\alpha_n t},$$

ou, en négligeant une partie très petite par rapport à celle que nous conservons,

$$w = -\frac{\alpha_n}{2\pi c^2 a^2 p \log pa} H_n \cos pz\, e^{\alpha_n t};$$

cette expression doit représenter le terme général de (a); en exprimant cette égalité, on obtient

$$H_n = -\frac{4\pi^2 A a^2 c^2 x}{l^2} \frac{n \log pa}{\alpha_n}.$$

Si l'on adoptait l'expression (γ) du n° 15 pour les racines α_n, la formule (a) s'accorderait entièrement avec celle qui a été admise par W. Thomson pour représenter le mouvement longitudinal de l'électricité à l'intérieur d'un fil télégraphique sous-marin.

18. Pour avoir la composante transversale du courant, nous considérons d'abord la solution simple (n° 13)

$$v = -\frac{\alpha R}{4\pi c^2 a^2 \log pa} T = -\frac{\alpha R}{4\pi c^2 a^2 \log pa} H_n \sin pz\, e^{\alpha_n t}$$

et, en remplaçant H_n par sa valeur,

$$v = \frac{\pi A x}{l^2} n R \sin pz\, e^{\alpha_n t}.$$

Nous aurons ensuite, pour la valeur complète de v,

$$v = \frac{\pi A x}{l^2} R \sum_{n=1}^{\infty} n \sin \frac{n\pi z}{l} e^{\alpha_n t},$$

quantité qui peut être considérée comme nulle, à cause de la petitesse du coefficient et à cause de celle de la série.

On calculera aussi facilement les composantes de la force magnétique exercée par le courant sur un point extérieur. On emploiera les formules

$$X = \frac{d\mathcal{Y}'}{dy} - \frac{d\mathcal{G}'}{dz}, \qquad Y = \frac{d\mathcal{F}'}{dz} - \frac{d\mathcal{Y}'}{dx'}, \qquad Z = 0,$$

et l'on trouvera

$$X = \Phi \frac{y}{R^2}, \qquad Y = -\Phi \frac{x}{R^2}, \qquad Z = 0,$$

en posant

$$\Phi = -\frac{2\pi a^2 \times A}{l} - \frac{4\pi a^2 \times A}{l} \sum_{n=1}^{\infty} \cos\frac{n\pi z}{l} e^{\alpha_n t}$$

ou

$$\Phi = -2\pi a^2 w,$$

et, en remplaçant Φ dans X, Y, on obtiendrait des formules identiques à celles qu'on avait trouvées pour le mouvement permanent.

19. Le mouvement de l'électricité sera considéré comme arrivé à l'état permanent dès que, avec des instruments donnés, on ne pourra plus constater la variabilité de ce mouvement. Si nous remarquons que, vers la fin de cet état variable, la série qui entre dans w peut être réduite à son premier terme à cause du décroissement rapide des exponentielles, nous reconnaissons que la durée sensible T de cet état variable sera donnée par l'équation

$$\alpha_1 T = -\beta,$$

β étant une quantité constante pour des instruments donnés. La valeur de α_1 est toujours représentée d'une manière très approchée par l'expression (γ) du n° 15, en sorte qu'on peut poser

$$\alpha_1 = -\frac{\pi^2 a^2 \times}{K l^2}, \qquad T = \frac{K l^2}{\pi^2 a^2 \times}\beta.$$

Ainsi T est proportionnel à l^2, ce qui est conforme aux expériences de Varley et de Jenkin; T est aussi proportionnel au coefficient d'induction K de l'isolateur et en raison inverse de la section et de la conductibilité spécifique du métal.

D'après les formules qui ont été obtenues, on ne peut dire que l'électricité ait une vitesse déterminée dans le fil télégraphique. Cette vitesse, en effet, serait la longueur de ce fil divisée par le temps de la transmission de l'électricité d'une station à l'autre, aussitôt après qu'on a établi le contact à la première. Or ce temps n'a pas une valeur déterminée. En effet, la formule de l'intensité du courant pour $z = l$ est

$$I = \pi a^2 \frac{\times A}{l}\left(1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{\alpha_n t}\right),$$

et, quelque petit que soit le temps t, pourvu qu'il ne soit pas nul, I aura une valeur différente de zéro ; cette valeur sera d'abord insensible pour tous les instruments ; elle sera reconnue d'autant plus tôt que les instruments seront plus délicats. Enfin l'intensité paraîtra ne plus subir de changement, quand t aura obtenu la valeur T déterminée ci-dessus.

Fil télégraphique aérien.

20. Après la théorie exposée dans les onze premiers numéros de ce Chapitre, toute la difficulté de la recherche du mouvement de l'électricité dans un fil aérien se réduit à déterminer la quantité α qui entre dans l'exponentielle relative au temps.

D'après ce que nous avons admis en général pour un conducteur traversé par des courants, le potentiel de l'électricité située à l'intérieur du fil et à sa surface est nul à l'extérieur ; mais, en considérant ce principe comme admissible en général, s'il est susceptible de quelque perturbation ordinairement insensible, on peut craindre que, dans un corps dont une dimension est énorme par rapport aux deux autres, cette perturbation joue un rôle qui ne soit plus négligeable.

Admettons néanmoins que le potentiel extérieur est nul, et posons en conséquence

$$\varphi' + \theta' = 0.$$

En remplaçant φ' et θ' par leurs valeurs (n°s 3 et 5), nous obtenons

$$\frac{J(ga)}{Q(pa)} + \frac{J'(pa)}{Q'(pa)} C = 0.$$

La quantité pa est certainement très petite ; mais, comme les suppositions que ga et qa soient aussi très petits simplifient beaucoup les formules, essayons de les faire, et cette équation deviendra

$$(\beta) \qquad C + \frac{2}{a^2 p^2 \log pa} = 0.$$

Remplaçons C par la valeur du n° 10, calculée d'après ces suppositions, et nous avons

$$\alpha^2 - \left(\frac{1}{2\pi\varkappa a^2 \log pa} - \frac{p^2}{4\pi\varkappa} \right) \alpha + p^2 c^2 - \frac{2c^2}{a^2 \log pa} = 0,$$

et, en supprimant des termes négligeables devant ceux qui sont conservés, nous obtenons enfin

$$\alpha^2 - \frac{1}{2\pi\varkappa a^2 \log pa}\alpha - \frac{2c^2}{a^2 \log pa} = 0.$$

On en tire

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varkappa a^2 \log pa} \pm \sqrt{\frac{1}{16\pi^2\varkappa^2 a^4 (\log pa)^2} + \frac{2c^2}{a^2 \log pa}};$$

or on reconnaît facilement que, sous le radical, le premier terme est très petit par rapport au second, en sorte qu'on peut réduire les racines α à

$$\alpha = -\varepsilon \pm \varepsilon_1\sqrt{-1},$$

en posant

$$\varepsilon = \frac{-1}{4\pi\varkappa a^2 \log pa}, \qquad \varepsilon_1 = \sqrt{\frac{-2c^2}{a^2 \log pa}}.$$

D'après ces formules, on trouve

$$\frac{g^2a^2}{4} = \frac{-1}{2\log pa},$$

qui est en général assez petit; mais on aurait

$$q^2 = 4\pi\varkappa\alpha + p^2$$

ou, en négligeant le second terme,

$$\frac{q^2a^2}{4} = \pi\varkappa\varepsilon a^2 \pm \pi\varkappa\varepsilon_1 a^2\sqrt{-1},$$

dont la partie imaginaire est très grande. Donc les approximations que nous avons employées ne sont pas admissibles, et il faut procéder autrement.

21. Essayons donc maintenant de reprendre les calculs en supposant ga très petit et qa très grand.

Pour intégrer l'équation

$$\frac{d^2J}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dJ}{dr} - J = 0,$$

quand r est très grand, nous poserons

$$J = e^r T,$$

et nous développerons T suivant les puissances descendantes de r; nous aurons ainsi la formule

$$J = \frac{e^r}{\sqrt{r}}\left(1 + \frac{1}{8}\frac{1}{r} + \frac{1}{8^2}\frac{9}{2}\frac{1}{r^2} + \dots\right),$$

que nous réduirons à son premier terme. La même équation est aussi satisfaite par l'expression

$$\frac{e^{-r}}{\sqrt{r}}\left(1 - \frac{1}{8}\frac{1}{r} + \frac{1}{8^2}\frac{9}{2}\frac{1}{r^2} + \dots\right).$$

En prenant

$$J(qR) = \frac{e^{qR}}{\sqrt{qR}},$$

nous avons, pour les équations (C) et (D) du n° 7,

$$-\frac{1}{2}Ng^2a - \frac{1}{2\alpha}Cp^2a + Lq\frac{e^{qa}}{\sqrt{qa}} = \frac{M}{a},$$

$$-\frac{1}{2}Ng^2 - \frac{1}{2\alpha}Cp^2 + Lq^2\frac{e^{qa}}{\sqrt{qa}} = -\frac{M}{a^2},$$

et nous en tirerons

$$(c) \qquad 2M = -Lq^{\frac{1}{2}}a^{\frac{3}{2}}e^{qa},$$

$$(d) \qquad -Ng^2a - \frac{1}{\alpha}Cp^2a + Lq^{\frac{3}{2}}a^{\frac{1}{2}}e^{qa} = 0.$$

Nous avons ensuite, pour les deux équations (A) et (B) [n° 6],

$$(a) \qquad -N - \frac{1}{\alpha}C + L_1\frac{e^{qa}}{\sqrt{qa}} = C'\log pa,$$

$$(b) \qquad -\frac{1}{2}Ng^2a - \frac{1}{2\alpha}Cp^2a + L_1q\frac{e^{qa}}{\sqrt{qa}} = \frac{C'}{a}.$$

Nous avons encore l'équation (E) ou

$$L_2 = L\frac{q^2}{p^2}$$

(n° 8), et l'on tire de (d)

$$\frac{1}{\alpha}C = L\frac{q^2}{p^2}\frac{e^{qa}}{\sqrt{qa}} - \frac{Ng^2}{p^2}.$$

Substituons ces valeurs dans (a), et nous trouverons

$$C' = \frac{N(g^2-p^2)}{p^2\log pa} = \frac{\alpha}{p^2c^2\log pa}.$$

D'après l'équation (F) du n° 8, on a

$$(f) \qquad M = C' - \frac{\alpha}{p^2c^2\log pa} = 0.$$

Remplaçons C, C′ et L_2 dans (b), et nous aurons

$$L = \frac{\alpha e^{-qa}}{q^2c^2\sqrt{qa}\log pa},$$

puis

$$C = \frac{\alpha^2}{p^2c^2qa\log pa} - \frac{Ng^2\alpha}{p^2}.$$

D'après (f), M est nul; il faut donc, pour que ce calcul soit admissible, que l'expression (c) soit assez petite pour être regardée comme nulle. Or on a $q^2 = 4\pi x\alpha$; α sera trouvé imaginaire et q renfermera une quantité réelle très grande qu'il faudra choisir négative, en sorte que l'expression (c) soit effectivement très petite par le facteur e^{qa}.

22. Pour obtenir maintenant l'équation en α, appliquons l'équation (β) ou

$$Cp^2 + \frac{2}{a^2\log pa} = 0;$$

en remplaçant C par la valeur précédente, nous obtiendrons

$$\frac{\alpha^2}{c^2qa\log pa} - \frac{\alpha^2}{c^2} - p^2\frac{\alpha}{4\pi xc^2} - p^2 + \frac{2}{a^2\log pa} = 0$$

et, en supprimant deux termes négligeables,

$$\alpha^2 + \frac{p^2}{4\pi\varkappa}\alpha - \frac{2c^2}{a^2 \log pa} = 0.$$

En ayant égard à la petitesse de $\frac{p^2}{4\pi\varkappa}$, on obtient

$$\alpha = -\varepsilon \pm \varepsilon_1\sqrt{-1}$$

avec

$$\varepsilon = \frac{p^2}{8\pi\varkappa}, \qquad \varepsilon_1 = \frac{c\sqrt{2}}{a}\frac{1}{\sqrt{-\log pa}}.$$

Vérifions que, d'après cette valeur de α, g^2a^2 est très petit et q^2a^2 très grand. Nous avons, d'une manière très approchée,

$$g^2 = m + p^2 = \frac{4\pi\varkappa\alpha^2}{\alpha + 4\pi\varkappa c^2} = \frac{\alpha^2}{c^2} = -\frac{\varepsilon_1^2}{c^2} = \frac{2}{a^2 \log pa},$$

quantité en général suffisamment petite; nous avons de même

$$q^2 = 4\pi\varkappa\alpha = -4\pi\varkappa\varepsilon \pm 4\pi\varkappa\varepsilon_1\sqrt{-1},$$

dont la partie imaginaire est très grande et la partie réelle très petite, et la quantité q a sa partie réelle très grande aussi bien que sa partie imaginaire.

Nous avons, pour la densité de la simple couche située à la surface du fil,

$$\rho = \frac{1}{4\pi c^2}\frac{d(\varphi + \vartheta)}{d\mathrm{R}} \qquad \text{pour } \mathrm{R} = a,$$

et, en remplaçant φ et ϑ par un terme simple, nous avons

$$\frac{d(\varphi + \vartheta)}{d\mathrm{R}} = \frac{1}{2}(g^2 + \mathrm{C}p^2)a\mathrm{T} = \frac{1}{2}\left(g^2 - \frac{2}{a^2 \log pa}\right)a\mathrm{T} = 0.$$

Il en résulte qu'il n'y a pas de couche simple d'électricité à la surface du fil et qu'il ne s'y trouve qu'une double couche.

23. *Expressions du potentiel et de l'intensité du courant.* — On a trouvé (n° 11) comme solution simple, pour la composante du courant

suivant l'axe du fil

$$w = \left[\frac{1}{4\pi c^2} J(gR) - L_2 \varkappa J(qR)\right] \alpha \frac{dT}{dz},$$

et nous avons, pour l'intensité du courant total correspondant,

$$I = 2\pi \int_0^a w R \, dR$$

ou

$$I = \left[\frac{a^2}{2\pi c^2} - 2\pi L_2 \varkappa \int_0^a J(qR) R \, dR\right] \alpha \frac{dT}{dz}.$$

Calculons l'intégrale renfermée dans cette expression. La fonction $J(qR)$ satisfait à l'équation différentielle

$$R \frac{d^2 J(qR)}{dR^2} + \frac{d J(qR)}{dR} = q^2 R J(qR)$$

ou

$$\frac{d}{dR}\left[R \frac{d J(qR)}{dR}\right] = q^2 R J(qR).$$

On en tire

$$q^2 \int_0^a J(qR) R \, dR = \left[R \frac{d J(qR)}{dR}\right]_a - \left[R \frac{d J(qR)}{dR}\right]_0.$$

Quand qR est très petit, on a

$$J(qR) = 1 + \frac{q^2 R^2}{4}, \qquad \text{par suite} \qquad \left[R \frac{d J(qR)}{dR}\right]_0 = 0;$$

quand qR est très grand, on a

$$J(qR) = \frac{e^{qR}}{\sqrt{qR}}, \qquad \frac{d J(qR)}{dR} = q \frac{e^{qR}}{\sqrt{qR}};$$

par suite

$$\left[R \frac{d J(qR)}{dR}\right]_a = \sqrt{qa}\, e^{qa},$$

et l'on a, pour l'intégrale cherchée,

$$\int_0^a J(qR) R \, dR = \frac{1}{q^2} \sqrt{qa}\, e^{qa}.$$

Ainsi, l'expression de I devient

$$\mathrm{I} = \left(\frac{a^2}{2\pi c^2} - \frac{2\pi}{q^2}\mathrm{L}_2 \times \sqrt{qa}\, e^{qa}\right) \alpha \frac{d\mathrm{T}}{dz},$$

et, en remplaçant L_2 par sa valeur et q^2 par $4\pi\times\alpha$, puis négligeant le premier terme, qui est très petit par rapport au second,

$$\mathrm{I} = \frac{-\alpha}{2p^2c^2\log pa}\frac{d\mathrm{T}}{dz}.$$

Nous avons ensuite, comme solution simple, pour l'expression du potentiel $\mathfrak{P}$,

$$\mathfrak{P} = \varphi + \theta = (1+\mathrm{C})\mathrm{T} = \left(1 - \frac{2}{a^2p^2\log pa}\right)\mathrm{T},$$

ce qui peut être réduit à

$$\mathfrak{P} = -\frac{2}{a^2p^2\log pa}\mathrm{T}.$$

Or on a

$$\mathrm{T} = (\mathrm{H}\sin pz + \mathrm{H}'\cos pz)\, e^{\alpha t};$$

en exprimant que T s'annule pour $z = 0$ et $z = l$, on a

$$\mathrm{H}' = 0, \qquad p = \frac{n\pi}{l},$$

où n représente un nombre entier, et, si l'on fait

$$\mathrm{H} = \mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 i,$$

où i désigne $\sqrt{-1}$, on a

$$\mathrm{T} = (\mathrm{H}_1 + \mathrm{H}_2 i)(\cos\varepsilon_1 t + i\sin\varepsilon_1 t)\, e^{-\varepsilon t}\sin pz.$$

Donc, en supprimant la partie imaginaire, on obtient

$$\mathfrak{P} = -\frac{2}{a^2p^2\log pa}(\mathrm{H}_1\cos\varepsilon_1 t - \mathrm{H}_2\sin\varepsilon_1 t)\, e^{-\varepsilon t}\sin pz.$$

24. Formons ensuite la solution générale. La fonction $\mathfrak{P}$ doit s'annuler pour $z = l$ et conserver une valeur constante A pour $z = 0$. On

a donc

$$\mathfrak{V} = A\frac{l-z}{l} - \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{p^2\log pa}(H_1\cos\varepsilon_1 t - H_2\sin\varepsilon_1 t)e^{-\varepsilon t}\sin pz.$$

Cette fonction doit être nulle pour $t = 0$; on a donc

$$A\frac{l-z}{l} - \frac{2}{a^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{H_1}{p^2\log pa}\sin pz = 0,$$

et l'on en conclut

$$H_1 = An\pi\frac{a^2}{l^2}\log pa.$$

Revenant à l'expression de I, nous aurons, pour la solution simple,

$$I = \frac{-1}{2pc^2\log pa}(-\varepsilon - \varepsilon_1 i)(H_1 + H_2 i)\cos pz\, e^{-\varepsilon t}(\cos\varepsilon_1 t + i\sin\varepsilon_1 t),$$

et, en supprimant la partie imaginaire,

$$I = \frac{1}{2pc^2\log pa}[(H_1\varepsilon + H_2\varepsilon_1)\cos\varepsilon_1 t + (H_1\varepsilon_1 - H_2\varepsilon)\sin\varepsilon_1 t]e^{-\varepsilon t}\cos pz.$$

Nous avons donc, pour l'expression générale de I,

$$I = \pi a^2\frac{Ax}{l} + \frac{l}{2\pi c^2}\sum\frac{1}{n\log pa}[(H_1\varepsilon + H_2\varepsilon_1)\cos\varepsilon_1 t + (H_1\varepsilon_1 - H_2\varepsilon)\sin\varepsilon_1 t]e^{-\varepsilon t}\cos pz.$$

Cette expression doit être nulle pour $t = 0$; on a donc

$$\pi a^2\frac{Ax}{l} + \frac{l}{2\pi c^2}\lim\sum\frac{1}{n\log pa}(H_1\varepsilon + H_2\varepsilon_1)e^{-\varepsilon t}\cos pz = 0,$$

quand t tend vers zéro; or la limite de

$$1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2 t}\cos pz,$$

quand t tend vers zéro, est nulle, quel que soit z. Nous avons donc

$$\frac{l}{2\pi c^2 n\log pa}(H_1\varepsilon + H_2\varepsilon_1) = 2\pi a^2\frac{Ax}{l};$$

par suite,

$$H_2\varepsilon_1 = \frac{A a^2}{l^2} n \log pa \left(4\pi^2 \times c^2 - \frac{p^2}{8\pi \times}\right)$$

ou simplement

$$H_2\varepsilon_1 = \frac{4 A \pi^2 \times c^2 a^2}{l^2} n \log pa.$$

On a aussi

$$H_1\varepsilon_1 - H_2\varepsilon = A n \pi \frac{a^2}{l^2} \varepsilon_1 \log pa,$$

en négligeant le second terme, qui est très petit par rapport au premier.

Les quantités H_1 et H_2 étant calculées, nous pouvons former les expressions générales de $\mathfrak{P}$ et de I, et nous obtiendrons

$$\mathfrak{P} = A \frac{l - z}{l} - \frac{2A}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} e^{-\varepsilon t} \cos\varepsilon_1 t \sin pz$$
$$+ 4\sqrt{2}\, A \times ca \sum_n \frac{1}{n} \sqrt{-\log pa}\, e^{-\varepsilon t} \sin\varepsilon_1 t \sin pz.$$

$$I = \pi a^2 \frac{A \times}{l} + 2\pi a^2 \frac{A \times}{l} \sum_n e^{-\varepsilon t} \cos\varepsilon_1 t \cos pz$$
$$+ \frac{A a}{lc\sqrt{2}} \sum_n \frac{1}{\sqrt{-\log pa}} e^{-\varepsilon t} \sin\varepsilon_1 t \cos pz.$$

La dernière partie de I peut être négligée, car le rapport du coefficient de la seconde série à celui de la première est $\frac{1}{2\sqrt{2} \times ac}$, quantité extrêmement petite. Mais, dans l'expression de $\mathfrak{P}$, le rapport des coefficients des deuxième et première séries est l'inverse du premier.

On peut donc réduire I à l'expression suivante

$$(p) \qquad I = \pi a^2 \frac{A \times}{l} (1 + 2\Sigma e^{-\varepsilon t} \cos\varepsilon_1 t \cos pz);$$

en particulier, pour $z = l$, on a la formule

$$(q) \qquad I = \pi a^2 \frac{A \times}{l} [1 + 2\Sigma (-1)^n e^{-\varepsilon t} \cos\varepsilon_1 t],$$

dont les termes décroissent extrêmement peu à cause de la petitesse de ε. Mais ces formules paraissent inadmissibles. En effet, le temps qui désigne la période de chacun des $\cos\varepsilon t$ est si petit et les termes des séries (p) et (q) changent de signe si rapidement, que ces séries ne semblent pas correspondre à un phénomène accessible à l'expérience. Le courant dans le fil, d'après la formule (p), paraîtrait atteindre presque immédiatement sa valeur définitive. MM. Lœwy et Stephan, en 1874, dans des expériences nombreuses pour déterminer la différence de longitude entre Marseille et Paris, ayant employé un fil télégraphique aérien de 4^{mm} d'épaisseur et d'une longueur égale à 863^{km}, ont trouvé $0,024$ de seconde pour le retard du signal entre ces deux villes. Ce temps serait incomparablement plus petit, d'après la formule (q).

25. Remarquons que la difficulté à admettre la solution précédente provient de ce que la racine α obtenue (n° 22) n'est pas réelle, et surtout de ce que sa partie imaginaire est extrêmement grande. Or, α est véritablement fourni par une équation transcendante, que nous avons réduite par approximation à une équation du second degré. Il faut donc examiner si, en employant une approximation plus grande, on n'obtiendra pas une racine négative outre les deux racines imaginaires que nous avons calculées (n° 22).

Reprenons l'équation qui détermine α

$$(r) \qquad \frac{J(ga)}{Q(pa)} + \frac{J'(pa)}{Q'(pa)} C = 0,$$

dans laquelle pa est très petit; mais laissons quelconques les grandeurs de ga et qa. Les équations (C) et (D) du n° 7 sont

$$-Ng\,J'(ga) - \frac{1}{\alpha} Cp\,J'(pa) + Lq\,J'(qa) = \frac{M}{a},$$

$$-Ng^2\,J''(ga) - \frac{1}{\alpha} Cp^2\,J''(pa) + Lq^2\,J''(qa) = -\frac{M}{a^2};$$

éliminons M entre ces deux équations, en nous servant de l'équation

du second ordre à laquelle satisfait la fonction J, et nous aurons

$$-\mathrm{N}g^2\,\mathrm{J}(ga)-\frac{1}{\alpha}\mathrm{C}p^2\,\mathrm{J}(pa)+\mathrm{L}q^2\,\mathrm{J}(qa)=0;$$

d'où nous tirons

$$\mathrm{C}=\frac{\alpha\mathrm{L}q^2}{p^2}\mathrm{J}(qa)-\frac{\alpha\mathrm{N}g^2}{p^2}\mathrm{J}(ga).$$

D'après un calcul fait au n° 13, en laissant encore ga et qa quelconques, on a

$$\mathrm{L}=\frac{\mathrm{J}(ga)}{4\pi\varkappa c^2 aq\log pa\,\mathrm{J}'(qa)}.$$

Remplaçons aussi $\mathrm{N}g^2$ par $\frac{\alpha}{c^2}$, et nous aurons

$$\mathrm{C}=\frac{q\alpha\,\mathrm{J}(qa)\,\mathrm{J}(ga)}{4\pi\varkappa c^2 ap^2\log pa\,\mathrm{J}'(qa)}-\frac{\alpha^2}{p^2c^2}\mathrm{J}(ga).$$

Substituons dans l'équation (r), puis divisons par $\mathrm{J}(ga)$; nous aurons l'équation

$$(s)\qquad \frac{1}{\log pa}-\frac{a^2}{2c^2}\alpha^2+\frac{aq\alpha\,\mathrm{J}(qa)}{8\pi\varkappa c^2\log pa\,\mathrm{J}'(qa)}=0.$$

Telle est l'équation transcendante qui détermine α; la quantité g en a disparu et qa a été laissé quelconque. Cette équation est assez difficile à discuter, si on laisse arbitraires les quantités l, a, $\varkappa$; néanmoins elle ne paraît pas avoir des racines négatives dans les conditions ordinaires d'un fil télégraphique.

26. D'après les expériences de Guillemin, faites en 1860, la durée T de l'établissement du courant dans un fil aérien augmente avec sa longueur, toutes choses égales d'ailleurs, et varie dans un rapport compris entre celui des longueurs l et celui de leurs carrés. Depuis cette époque, plusieurs physiciens se sont occupés de la propagation de l'électricité dans un fil aérien. Hagenbach a résumé les expériences faites sur ce sujet (*Annalen der Physik*, von G. Wiedemann, t. XXIX; 1886), et il a exposé de plus celles qu'il avait entreprises, en 1885, entre Bâle et plusieurs autres villes de Suisse. Suivant lui, la durée T varie

avec l dans un rapport très analogue à celui de l^2; mais il y a lieu de penser que la manière dont T varie avec l n'est pas si simple.

Remarquons que la propagation de l'électricité est beaucoup plus rapide dans les fils aériens que dans les fils sous-marins; les expériences sont, par conséquent, beaucoup plus difficiles pour les premiers que pour les seconds.

Il convient de rechercher si l'on n'obtiendrait pas une propagation sensible de l'électricité en tenant compte de certaines influences perturbatrices.

Les fils aériens sont ordinairement en fer, métal qui s'aimante sous l'influence des courants; mais, d'après des calculs que j'ai faits à ce sujet, il n'en résulterait pas de modification pour la formule de l'intensité du courant.

Remarquons ensuite que, dans cette théorie, j'ai supposé que la courbure du fil est partout extrêmement petite (n° 1); cette condition est toujours remplie dans les fils sous-marins, mais pas toujours dans un fil aérien auprès des poteaux qui le soutiennent.

Mais la perte de l'électricité sur la ligne télégraphique doit avoir une influence. Celle qui a lieu par l'air est probablement insensible; au contraire, celle qui se produit par les poteaux ne doit pas être négligeable. Si cette influence est prépondérante, comme le degré d'isolement des fils peut varier beaucoup suivant les lignes télégraphiques, les expériences faites sur différentes lignes donneront des résultats peu comparables, comme cela paraît avoir lieu effectivement.

Nous allons donc rechercher l'influence du défaut d'isolement des poteaux.

Perte d'électricité par les poteaux.

27. Nous supposerons que les poteaux qui supportent le fil se suivent à des distances égales et que la perte d'électricité sur chacun soit la même, et, comme la distance de deux poteaux consécutifs est très petite par rapport à la longueur totale du fil, nous pourrons, pour appliquer le calcul, regarder cette perte comme s'effectuant tout le long du fil.

La perte d'électricité doit être proportionnelle au potentiel total de

l'électricité pris à la surface, et, si nous désignons par ρ la densité de l'électricité à la surface, par υ la composante du courant suivant le rayon, nous aurons

$$(\alpha) \qquad \frac{d\rho}{dt} = \upsilon_a + \mu(\varphi_a + \theta_a),$$

μ étant une constante et l'indice a indiquant que les quantités sont prises pour $R = a$.

D'après le raisonnement qui a servi à établir les équations (d) du n° 4 du Chapitre VIII, nous aurons

$$\frac{d\mathcal{F}}{dx} + \frac{d\mathcal{G}}{dy} + \frac{d\mathcal{H}}{dz} = -\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi}{dt} + \mu\int(\varphi+\theta)\frac{d\sigma}{r}.$$

L'équation qui donne φ sera aussi modifiée (Chap. VIII, n° 10) et deviendra

$$(\beta) \qquad \Delta\frac{d\varphi}{dt} + 4\pi\varkappa c^2\Delta\varphi - 4\pi\varkappa\frac{d^2\varphi}{dt^2} + 4\pi\varkappa\mu c^2\int\frac{d(\varphi+\theta)}{dt}\frac{d\sigma}{r} = 0.$$

Posons

$$(\gamma) \qquad \varphi = \Phi + \frac{\mu c^2}{\alpha}\int(\varphi+\theta)\frac{d\sigma}{r} = \Phi + \psi;$$

comme ψ satisfait à l'équation $\Delta\psi = 0$, l'équation (β) sera remplacée par

$$\Delta\frac{d\Phi}{dt} + 4\pi\varkappa c^2\Delta\Phi - 4\pi\varkappa\frac{d^2\Phi}{dt^2} = 0$$

et reprendra la forme qu'elle avait précédemment; mais les équations qui donnent $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ deviendront

$$(\delta) \qquad \begin{cases} \Delta\mathcal{F} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\Phi}{dx} + \dfrac{d\theta}{dx} + \dfrac{d\mathcal{F}}{dt}\right) + 4\pi\varkappa\dfrac{d\psi}{dx}, \\ \Delta\mathcal{G} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\Phi}{dy} + \dfrac{d\theta}{dy} + \dfrac{d\mathcal{G}}{dt}\right) + 4\pi\varkappa\dfrac{d\psi}{dy}, \\ \Delta\mathcal{H} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\Phi}{dz} + \dfrac{d\theta}{dz} + \dfrac{d\mathcal{H}}{dt}\right) + 4\pi\varkappa\dfrac{d\psi}{dz}. \end{cases}$$

28. Occupons-nous maintenant d'un système de solutions simples

et calculons la partie correspondante de la fonction ψ. Cette partie de ψ aura à l'intérieur et à l'extérieur les formes suivantes

$$\psi = \mathrm{D}\,\mathrm{J}(p\mathrm{R})\mathrm{T},$$
$$\psi' = \mathrm{D}\frac{\mathrm{J}(pa)}{\log pa}\log p\mathrm{R}.\mathrm{T},$$

où D désigne une constante. Cette fonction représente le potentiel d'une couche superficielle dont la densité est

$$-\frac{\mathrm{D}}{4\pi}\left(-p\,\mathrm{J}'(pa)+\frac{\mathrm{J}(pa)}{a\log pa}\right)\mathrm{T};$$

mais, d'après la formule (γ), cette densité est aussi égale à

$$\frac{\mu c^2}{\alpha}(\varphi+\theta)=\frac{\mu c^2}{\alpha}(1+\mathrm{C})\mathrm{T}.$$

En égalant ces deux expressions et supprimant une partie négligeable, on obtient

$$\mathrm{D}=-\frac{4\pi a\mu c^2}{\alpha}(1+\mathrm{C})\log pa,$$

et, en remplaçant C par sa valeur,

$$\mathrm{C}=\frac{\alpha}{2\pi\times a^2p^2c^2\log pa}-\frac{\alpha^2}{p^2c^2}-1,$$

on trouve

$$\mathrm{D}=\frac{4\pi\mu a}{p^2}\left(\alpha\log pa-\frac{1}{2\pi\times a^2}\right).$$

29. Nous pouvons ensuite compléter les fonctions $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}$, $\mathcal{H}$ trouvées (n°s 6 et 7) par des fonctions F, G, H satisfaisant aux équations

$$\Delta\mathrm{F}=0,\qquad \Delta\mathrm{G}=0,\qquad \Delta\mathrm{H}=0,$$

et les équations (δ) donneront

$$\frac{d\psi}{dx}+\frac{d\mathrm{F}}{dt}=0,\qquad \frac{d\psi}{dy}+\frac{d\mathrm{G}}{dt}=0,\qquad \frac{d\psi}{dz}+\frac{d\mathrm{H}}{dt}=0$$

ou

$$\mathrm{F}=-\frac{1}{\alpha}\frac{d\psi}{dx},\qquad \mathrm{G}=-\frac{1}{\alpha}\frac{d\psi}{dy},\qquad \mathrm{H}=-\frac{1}{\alpha}\frac{d\psi}{dz}.$$

A l'extérieur, nous avons les équations

$$\Delta\mathcal{F}' = 0, \qquad \Delta\mathcal{G}' = 0, \qquad \Delta\mathcal{H}' = 0,$$

$$\frac{d\mathcal{F}'}{dx} + \frac{d\mathcal{G}'}{dy} + \frac{d\mathcal{H}'}{dz} = -\frac{1}{c^2}\frac{d\varphi'}{dt} + \mu\int(\varphi+\theta)\frac{d\sigma}{r},$$

et l'on y satisfera en posant

$$\varphi' = \Phi' + \frac{\mu c^2}{\alpha}\int(\varphi+\theta)\frac{d\sigma}{r} = \Phi' + \psi',$$

prenant pour Φ' la valeur trouvée précédemment pour φ' et conservant les expressions de $\mathcal{F}$, $\mathcal{G}'$, $\mathcal{H}'$ trouvées (n°s 6 et 7).

Les expressions de θ et θ' seront celles qui ont été données au n° 5.

Les expressions de $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}'$, P, P' des n°s 6 et 7 deviennent

$$\mathcal{H} = \left[-\mathrm{N}\,\mathrm{J}(g\mathrm{R}) - \frac{\mathrm{C}}{\alpha}\mathrm{J}(p\mathrm{R}) + \mathrm{L}_2\,\mathrm{J}(q\mathrm{R})\right]\frac{d\mathrm{T}}{dz} - \left(\frac{4\pi\mu a}{p^2} - \log pa - \frac{2\mu}{p^2\times a\alpha}\right)\frac{d\mathrm{T}}{dz},$$

$$\mathcal{H}' = \mathrm{C}'\log p\mathrm{R}\,\frac{d\mathrm{T}}{dz},$$

$$\mathrm{P} = \left[-\mathrm{N}g\,\mathrm{J}'(g\mathrm{R}) - \frac{\mathrm{C}}{\alpha}\mathrm{J}'(p\mathrm{R}) + \mathrm{L}q\,\mathrm{J}'(q\mathrm{R})\right]\mathrm{T} - 2\pi\mu a\left(\log pa - \frac{1}{2\pi\times a^2\alpha}\right)\mathrm{RT},$$

$$\mathrm{P}' = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}\mathrm{T}.$$

30. Essayons maintenant de satisfaire à la surface, ou pour $\mathrm{R} = a$, aux conditions

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}', \qquad \frac{d\mathcal{H}}{d\mathrm{R}} = \frac{d\mathcal{H}'}{d\mathrm{R}}, \qquad \mathrm{P} = \mathrm{P}', \qquad \frac{d\mathrm{P}}{d\mathrm{R}} = \frac{d\mathrm{P}'}{d\mathrm{R}}.$$

Si l'on suppose ga et qa très petits, ces conditions deviennent, en négligeant des quantités très petites,

$$(\mathrm{A}) \qquad -\mathrm{N} - \frac{1}{\alpha}\mathrm{C} + \mathrm{L}_2 = \mathrm{C}'\log pa + \frac{4\pi\mu a}{p^2} - \log pa - \frac{2\mu}{p^2\times a\alpha},$$

$$(\mathrm{B}) \qquad -\mathrm{N}g^2a - \frac{1}{\alpha}\mathrm{C}p^2a + \mathrm{L}_2q^2a = \frac{2\mathrm{C}'}{a},$$

$$(\mathrm{C}) \qquad -\mathrm{N}g^2a - \frac{1}{\alpha}\mathrm{C}p^2a + \mathrm{L}q^2a = \frac{2\mathrm{M}}{a},$$

$$(\mathrm{D}) \qquad -\mathrm{N}g^2 - \frac{1}{\alpha}\mathrm{C}p^2 + \mathrm{L}q^2 = -\frac{2\mathrm{M}}{a^2}.$$

Nous avons encore les équations obtenues au n° 8,

$$\text{(E)} \qquad L_2 = L\frac{q^2}{p^2},$$

$$\text{(F)} \qquad M - C' = \frac{-\alpha}{p^2 c^2 \log pa}.$$

Les équations (B), (C), (D), (E), (F) sont exactement celles que nous avons obtenues précédemment; leur résolution donne donc les valeurs de M, C, C', L, L_2 obtenues au n° 10; mais alors on ne pourra plus satisfaire à l'équation (A).

La suppression de l'équation (A) indique que $\mathfrak{z}$ ne varie pas d'une manière continue à travers la surface du fil; comme on a

$$\mathfrak{z} = \int \frac{w}{r}\, d\varpi,$$

il en résulte que, à la surface du fil, il y aura deux couches de courant qui se mouvront parallèlement à la surface du fil et en sens contraire.

31. Pour obtenir l'équation en α, posons encore

$$\varphi' + \theta' = 0,$$

nous aurons

$$\frac{J(ga)}{\log pa} + \frac{D}{\log pa} + \frac{a^2 p^2}{2} C = 0$$

ou

$$\frac{a^2}{2c^2}\alpha^2 - \left(\frac{4\pi\mu a}{p^2} + \frac{1}{4\pi\varkappa c^2 \log pa}\right)\alpha + \frac{2\mu}{\varkappa a p^2 \log pa} - \frac{1}{\log pa} = 0.$$

Les termes qui contiennent c^2 en dénominateur peuvent être négligés, et l'équation du second degré se réduit à

$$\alpha = \frac{1}{2\pi\varkappa a^2 \log pa} - \frac{p^2}{4\pi\mu a \log pa};$$

l'autre racine aura une valeur négative extrêmement grande et qui correspondra à un mouvement qui peut être regardé comme s'éteignant immédiatement.

32. *État permanent.* — Le courant électrique tend vers un état permanent qu'il faut connaître pour l'ajouter à la somme des solutions simples qui expriment la variabilité du mouvement. Pour cet état, on a les équations

$$(p)\qquad \begin{cases} \Delta\mathfrak{F} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi}{dx} + \dfrac{d\theta}{dx}\right), \\ \Delta\mathfrak{G} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi}{dy} + \dfrac{d\theta}{dy}\right), \\ \Delta\mathfrak{H} = 4\pi\varkappa\left(\dfrac{d\varphi}{dz} + \dfrac{d\theta}{dz}\right), \end{cases}$$

$$(q)\qquad \Delta\theta = 0,$$

$$(r)\qquad \frac{d\mathfrak{F}}{dx} + \frac{d\mathfrak{G}}{dy} + \frac{d\mathfrak{H}}{dz} = \mu\int(\varphi+\theta)\frac{d\sigma}{r}.$$

En différentiant les équations (p) respectivement par rapport à x, y, z et ajoutant, puis ayant égard aux équations (q) et (r), on obtient

$$\Delta\varphi = 0.$$

D'après cela, posons

$$\varphi = \mathfrak{z}(\tau\mathrm{R})\,\mathfrak{T},$$

en faisant

$$(s)\qquad \mathfrak{T} = \mathfrak{A}e^{\tau z} + \mathfrak{B}e^{-\tau z},$$

et prenant, par suite, pour $\mathfrak{z}(\tau\mathrm{R})$ une solution de l'équation

$$\frac{d^2\mathfrak{z}}{d\mathrm{R}^2} + \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\mathfrak{z}}{d\mathrm{R}} + \tau^2\mathfrak{z} = 0$$

ou

$$\mathfrak{z}(\tau\mathrm{R}) = 1 - \frac{\tau^2\mathrm{R}^2}{4} + \ldots.$$

Nous avons ensuite, en supposant τa très petit,

$$\varphi' = \frac{1}{\log\tau a}\log\tau\mathrm{R}.\mathfrak{T}.$$

En appliquant l'équation

$$\varphi' + \theta' = 0,$$

nous obtenons

$$\theta' = -\frac{1}{\log\tau a}\log\tau\mathrm{R}.\mathfrak{T}.$$

Les dérivées de θ et θ' par rapport à R doivent être égales pour $R = a$, et l'on en conclut

$$\theta = \frac{2}{a^2\tau^2 \log \tau a} \mathfrak{I}(\tau R)\mathfrak{C}.$$

Nous pouvons maintenant calculer les composantes longitudinale et transversale du courant; elles sont

$$w = -\varkappa \frac{d(\varphi+\theta)}{dz} = -\varkappa\left(1 + \frac{2}{a^2\tau^2 \log \tau a}\right) \mathfrak{I}(\tau R)\frac{d\mathfrak{C}}{dz},$$

$$v = -\varkappa \frac{d(\varphi+\theta)}{dR} = -\varkappa\left(1 + \frac{2}{a^2\tau^2 \log \tau a}\right) \tau \mathfrak{I}'(\tau R)\mathfrak{C}.$$

Puis l'équation (α) du n° 27 nous fournit la condition à la surface

$$v_a + \mu(\varphi_a + \theta_a) = 0,$$

qui donne

$$\mu = -\frac{\varkappa a \tau^2}{2}.$$

Cette relation entre τ et μ permettra de calculer une de ces quantités si l'on connaît l'autre. D'après le raisonnement du n° 27, μ est indépendant de la longueur l du fil; donc, d'après cette formule, τ l'est aussi.

Le potentiel $\varphi + \theta$ doit s'annuler pour l'extrémité $z = l$ du fil; donc $\mathfrak{C}$ est le produit d'une constante par

$$\sinh[\tau(l-z)];$$

$\varphi + \theta$ doit de plus se réduire au potentiel donné A pour $z = 0$; on en conclut

$$\varphi + \theta = A\frac{\sinh[\tau(l-z)]}{\sinh(\tau l)},$$

puis

$$w = \varkappa A \tau \frac{\cosh[\tau(l-z)]}{\sinh(\tau l)}.$$

33. Supposons, par exemple, que, le courant étant devenu permanent, son intensité au point d'arrivée soit les $\frac{9}{10}$ de son intensité au

point de départ; nous aurons

$$\frac{1}{\cosh(\tau l)} = \frac{9}{10},$$

et il en résulte

$$\tau l = 0,4669.$$

Si nous nous donnons encore la longueur l du fil égale à 400^{km} et son rayon égal à 2^{mm}, nous aurons

$$l = 4.10^7, \qquad a = 0,2,$$

par suite

$$\tau = \frac{1167}{10^{11}}, \qquad \tau a = \frac{2334}{10^{12}}.$$

Prenons pour la conductibilité spécifique du fer du fil $\varkappa = \frac{1}{9294}$, et nous aurons

$$\mu = -\frac{1465}{10^{24}}.$$

34. *Solution générale.* – En ajoutant la solution du mouvement permanent à la somme des solutions simples relatives au mouvement variable, nous obtiendrons la formule suivante pour la composante w du courant

$$w = \varkappa A \tau \frac{\cosh[\tau(l-z)]}{\sinh(\tau l)} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos\frac{n\pi z}{l} e^{\alpha_n t},$$

les coefficients B_n devant être déterminés de manière que w s'annule pour $t = 0$; les quantités α_n ont la valeur trouvée au n° 31, et, si l'on y remplace μ par $-\frac{\varkappa a \tau^2}{2}$, on obtient

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi\varkappa a^2 \log pa} + \frac{p^2}{2\pi\varkappa a^2\tau^2 \log pa},$$

quantité négative, puisque $\log pa$ est négatif.

D'après cela, on a

$$w = \varkappa A\left[\tau\frac{\cosh[\tau(l-z)]}{\sinh(\tau l)} + \frac{2\pi^2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^2\pi^2+\tau^2 l^2}\cos\frac{n\pi z}{l}e^{\alpha_n t}\right].$$

La série n'a pas une valeur déterminée pour $t = 0$; mais elle tend vers une valeur déterminée quand t tend vers zéro, de sorte que w, étant regardé comme une fonction continue de t, est nul, d'après la formule précédente, pour $t = 0$.

35. La quantité $\log pa$, dans laquelle p est égal à $\frac{n\pi}{l}$, varie peu d'un terme au suivant. D'autre part, si l'on considère plusieurs fils qui ne diffèrent que par la longueur et pour lesquels les rapports des longueurs ne soient pas trop grands, $\log\frac{\pi a}{l}$ pourra être regardé sans grande erreur comme le même pour tous les fils, parce que $\frac{l}{a}$ est un nombre extrêmement grand. Nous avons vu aussi que τ est indépendant de l.

D'après cela, désignons par T le temps après lequel le mouvement paraîtra permanent à la station d'arrivée pour un appareil donné; on aura

$$\alpha_1 T = -\gamma,$$

γ étant un nombre fixe, si l'on considère comme très petits le deuxième terme et les suivants vis-à-vis du premier pour cette valeur de t. Ainsi T peut s'écrire

$$T = -2\pi x\gamma \frac{\tau^2 l^2}{\pi^2 + \tau^2 l^2} a^2 \log\frac{\pi a}{l}.$$

D'après le calcul du n° 33, on voit que τl sera petit par rapport à π, sans quoi le fil serait certainement mal isolé. Donc T variera à peu près proportionnellement à l^2, quoique dans un rapport moindre. Nous arrivons ainsi à un résultat très conforme aux expériences.

La quantité μ, introduite au n° 27, doit varier en raison inverse de a et, d'après la valeur de μ, $a\tau$ est indépendant de a. Donc T dépend très peu de la grandeur du rayon.

La quantité α_1 a pour valeur

$$\alpha_1 = \frac{-1}{2\pi x a^2 \log\frac{l}{\pi a}}\left(1 + \frac{\pi^2}{\tau^2 l^2}\right).$$

Calculons cette quantité dans les conditions indiquées au n° 33, sans

choisir toutefois la longueur l. Désignons par $\log_v$ les logarithmes vulgaires et par M leur module; nous aurons

$$\alpha_1 = -\frac{929400\,M}{8\pi\left(\log_v l + \log_v \frac{10}{2\pi}\right)}\left(1 + \frac{10^{22}\pi^2}{1167^2}\frac{1}{l^2}\right)$$

ou

$$\alpha_1 = -\frac{16060}{\log_v l + 0{,}2018}\left(1 + \frac{7247 \times 10^{16}}{l^2}\right).$$

Mais le second terme de la parenthèse pourra devenir beaucoup plus petit si la perte d'électricité est plus grande que nous ne l'avons supposé dans cet exemple particulier.

Suivant Varley, sur une ligne de 640^{km} convenablement isolée, l'intensité du courant reçu ne doit pas être moindre que les 0,46 de l'intensité du courant émis. D'après cela, prenons la longueur du fil égale à 640^{km}, le rayon $a = 2^{mm}$ et supposons que l'intensité du courant à l'arrivée soit les 0,46 de l'intensité au départ; nous aurons

$$\frac{1}{\cos h(\tau l)} = 0{,}46, \qquad \tau l = 1{,}4120, \qquad \tau = \frac{2{,}2062}{10^8}.$$

Considérons ensuite un fil semblable au précédent, isolé de la même manière, mais de longueur l quelconque. Désignons par l' la longueur du fil précédent; nous aurons, pour la quantité α_1,

$$\alpha_1 = -\frac{16060}{\log_v l + 0{,}2018}\left(1 + 4{,}9503\frac{l'^2}{l^2}\right).$$

Alors la proportionnalité de T à l^2 ne pourra être admise approximativement que pour des valeurs de l notablement plus petites que l'.

Théorie de Kirchhoff.

36. Kirchhoff a publié, en 1857, deux Mémoires sur la propagation de l'électricité dans un fil télégraphique aérien, qui méritent d'autant plus d'être cités qu'ils sont le premier essai qui ait été fait pour résoudre ce problème (*Mémoires de Kirchhoff*, p. 131 et 154).

Suivant Kirchhoff, le fil est recouvert d'une simple couche d'électricité. Appliquons les formules des nos 1 à 10 en supprimant la double couche que nous avons admise. Le potentiel θ de la double couche est donc nul et l'on doit faire C = 0 (n° 5); cette condition déterminera α.

En supposant *ga* et *qa* très petits, on a donc (n° 10)

$$C = \frac{\alpha}{4\pi\varkappa a^2 p^2 c^2 \log pa} - \frac{N g^2}{p^2}\alpha = 0;$$

en remplaçant

$$N g^2 = \frac{\alpha}{c^2} + \frac{1}{4\pi\varkappa c^2} p^2 + \frac{p^2}{\alpha}$$

et négligeant un terme très petit, on obtient l'équation

$$\alpha^2 - \frac{1}{2\pi\varkappa a^2 \log pa}\alpha - p^2 c^2 = 0.$$

Bien que les formules de Kirchhoff ne soient pas complètement d'accord avec les miennes, il trouve une équation en α qui ne diffère de la précédente qu'en ce que $\log pa$ ou $\log \frac{n\pi a}{l}$ est remplacé par $\log \frac{\pi a}{l}$; mais, si l'on procède convenablement aux approximations, c'est bien $\log pa$ que l'on doit trouver dans cette équation.

La partie réelle des racines α est très petite par rapport au coefficient de $\sqrt{-1}$, et on peut les écrire

$$\alpha = \frac{1}{4\pi\varkappa a^2 \log pa} \pm pc\sqrt{-1} = -\varepsilon \pm pc\sqrt{-1},$$

ε étant positif.

On a, pour un terme simple de la composante w du courant (n° 11),

$$w = \frac{-\alpha}{2\pi c^2 a^2 p \log pa} H \cos pz\, e^{\alpha t},$$

où H a une valeur imaginaire, et, en réduisant w à sa partie réelle, on peut le mettre sous cette forme

$$(a) \qquad w = e^{-\varepsilon t}(C \cos pct + D \sin pct)\cos pz,$$

où C et D sont deux constantes réelles. Or on a

$$\cos pct \cos pz = \tfrac{1}{2}\cos p(z+ct) + \tfrac{1}{2}\cos p(z-ct),$$
$$\sin pct \sin pz = \tfrac{1}{2}\sin p(z+ct) - \tfrac{1}{2}\sin p(z-ct);$$

il en résulte que l'expression (a) indique un mouvement de l'électricité qui se propage en deux ondes de sens contraire avec la vitesse c, qui est celle de la lumière.

Dans les calculs de Kirchhoff, $\log pa$ étant remplacé par $\log \frac{\pi a}{l}$, ε ne varie pas d'un terme de w à l'autre; tous les termes de la partie variable de l'expression générale de w sont donc multipliés par la même exponentielle $e^{-\varepsilon t}$, et il en résulte que les séries renfermées dans l'expression générale de w peuvent être sommées facilement; mais l'exponentielle $e^{-\varepsilon t}$ doit réellement varier d'un terme à l'autre, et il s'ensuit que le mouvement tendrait beaucoup plus rapidement vers l'état permanent que ne l'indique la solution de Kirchhoff.

Mais, soit qu'on adopte la théorie de Kirchhoff ou cette théorie modifiée comme je viens de l'indiquer, on obtient des résultats en opposition avec les expériences.

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

Pages

PRÉFACE v

CHAPITRE I.

PRINCIPES GÉNÉRAUX SUR LE MOUVEMENT DE L'ÉLECTRICITÉ DANS L'INTÉRIEUR D'UN CORPS CONDUCTEUR.

Définitions préliminaires 1
Force électromotrice 4
Variation de l'électricité libre à l'intérieur d'un conducteur 6
Courants permanents 6
Variation de la quantité d'électricité à la surface d'un conducteur 9
Principe de Volta 10
Courants permanents dans deux conducteurs hétérogènes entre eux, qui se touchent 11
Travail produit par le mouvement de l'électricité 12
Échauffement du conducteur 14

CHAPITRE II.

LOIS GÉNÉRALES DES COURANTS LINÉAIRES PERMANENTS.

Loi de Ohm 15
Loi de Joule et phénomène de Peltier 19
Formules de Ohm 20
Sur la distribution des courants dans un réseau linéaire 22
Autre solution de ce problème 25
Action des courants sur les aimants 28
Expression du potentiel magnétique P 31
Valeur de $\int \frac{dP}{ds} ds$ le long d'une ligne s 34
Travail produit sur une double couche par un système magnétique 37
Théorèmes auxiliaires 39
Potentiel d'une double couche magnétique sur une autre 42
Potentiel d'un courant fermé sur un autre 44

Pages

Action mutuelle de deux éléments de courant ... 47
Définition de l'unité de courant ... 50
Seconde expression du potentiel mutuel de deux courants fermés ... 52
Action d'un courant fermé sur un élément de courant ... 53
Directrice d'un courant fermé infiniment petit ... 57
Solénoïdes ... 57
Action d'un courant fermé sur un solénoïde ... 60
Action d'un courant fermé infiniment petit sur un pareil courant ... 62
Action mutuelle de deux solénoïdes ... 62
Action d'un aimant sur un courant ... 64

CHAPITRE III.

INDUCTION PRODUITE DANS LES COURANTS LINÉAIRES.

Potentiel d'aimants ou de courants sur un courant linéaire fermé ... 67
Action électrodynamique sur un élément de courant ... 69
Force électromotrice d'induction ... 70
Recherches de F. Neumann ... 71
Induction mutuelle de deux courants ... 75
Théorie de l'action mutuelle des circuits électriques ... 76
Action mutuelle de deux courants ... 79
Remarques sur la théorie précédente de l'induction des courants linéaires ... 80
Force électromotrice d'induction sur un circuit en mouvement ... 81
Loi de Weber ... 83
Détermination par la loi de Weber de la force électromotrice d'induction produite sur un élément de courant ... 88

CHAPITRE IV.

THÉORIE DES COURANTS PERMANENTS DANS DES CONDUCTEURS DE FORME QUELCONQUE.

Conducteur traversé par un courant entrant et sortant par deux points de sa surface ... 95
Sur la couche électrique qui produit le potentiel électromoteur ... 96
Détermination de la force magnétique des courants ... 102
Expressions des composantes du courant au moyen des composantes de la force magnétique ... 104
Expression du potentiel de l'électricité qui n'est pas sur le conducteur ... 106
Potentiel de l'électricité située à la surface d'un conducteur linéaire ... 108
Conducteur dans lequel pénètrent les électrodes ... 111
Courants permanents dans un conducteur sphérique ... 111
Théorèmes sur les fonctions sphériques ... 114
Sphère traversée par un courant permanent qui entre et sort par deux points situés à l'extrémité d'un diamètre ... 116
Force magnétique produite par les électrodes fixées à cette sphère ... 124
Force magnétique totale de la sphère et des fils ... 127
Détermination des lignes de courant dans la sphère ... 128
Mouvement permanent de l'électricité dans un ellipsoïde planétaire ... 130

CHAPITRE V.

EXEMPLES DE COURANTS PERMANENTS DANS DES CONDUCTEURS HOMOGÈNES ET EN PARTICULIER DANS DES PLAQUES.

Pages
Sur la résistance d'un conducteur 136
Courants dans une plaque plane 137
Courants dans une plaque circulaire 140
Force magnétique exercée par la plaque à l'extérieur 143
Courants permanents dans une plaque courbe 150
Courants dans une coquille sphérique 154
Autres exemples de plaques courbes traversées par des courants permanents 156
Courants dans une plaque rectangulaire 163
Courants dans un parallélépipède rectangle 170

CHAPITRE VI.

PROBLÈMES PARTICULIERS RELATIFS A DES COURANTS D'INDUCTION PRODUITS DANS DES PLAQUES OU DANS DES CONDUCTEURS DE RÉVOLUTION.

Courants permanents produits par induction dans une plaque courbe 178
Plaque plane traversée par des courants induits variables 180
Plaque circulaire tournant autour de son axe et induite par des aimants 190
Cas où les aimants inducteurs se réduisent à une aiguille aimantée 197
Aiguille mobile déplacée par le disque 199
Conducteur de révolution soumis à l'influence d'aimants, pendant qu'il tourne d'un mouvement uniforme autour de son axe 200
Problème précédent dans le cas où la distribution magnétique est symétrique autour de l'axe du conducteur 206

CHAPITRE VII.

SUR LES UNITÉS ÉLECTRIQUES.

Unités dérivées en Mécanique 211
Unités de masse électrique 212
Système électrostatique 216
Système électromagnétique 218
Sur différentes expressions de la vitesse c 220
Système C.G.S. et système pratique 221

CHAPITRE VIII.

SUR LE MOUVEMENT VARIABLE DE L'ÉLECTRICITÉ DANS LES CONDUCTEURS DE FORME QUELCONQUE.

Force électromotrice d'induction sur un courant linéaire 223
Équations du mouvement variable de l'électricité 225

Pages
Énergie de toutes les actions électriques ... 232
Système unique de solutions des équations du mouvement de l'électricité ... 235
Force magnétique des courants ... 237
Sur l'intégration des équations du mouvement de l'électricité ... 238

CHAPITRE IX.

FILS TÉLÉGRAPHIQUES.

Du mouvement variable de l'électricité dans un fil extrêmement long ... 243
Fil télégraphique sous-marin ... 260
Fil télégraphique aérien ... 270
Perte d'électricité par les poteaux ... 281
Théorie de Kirchhoff ... 290

ERRATA.

Page 33, 11e et 12e ligne en montant. Changer quatre fois la lettre V en P.

Page 55, dernière ligne. Ce plan est naturellement nommé plan directeur. Toutefois, Ampère appelle *plan directeur* un plan perpendiculaire à la directrice (Voir *Mémoires de la Société française de Physique*, t. III, p. 37).

Page 82. Oter le signe — dans la formule (B).

Page 83. Oter le signe — dans la formule (C).

Page 193, ligne 12 en montant. Mettre le facteur c^2 en avant de l'intégrale.

13673 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine of five cents a day is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Phys 3208.88
Theorie de l'electrodynamique,
Cabot Science 003448570
3 2044 091 959 247